

Devoir Surveillé 8

L'épreuve dure 4 heures. Le sujet est constitué de 7 pages, et comporte une question de cours, deux exercices et un problème. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Résoudre les exercices de ce sujet sur **copies doubles**. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements comptent pour une part importante de l'évaluation de la copie, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Données : Utilisable dans tout le sujet si nécessaire, et sans justification.

- Variation d'entropie d'une phase condensée incompressible et indilatable au cours d'une transformation (i et f signifient état initial/final) :

$$\Delta S = C \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

- Variation d'entropie d'un gaz parfait (i et f signifient état initial/final) :

$$\Delta S = C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = C_P \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

Question de cours (maximum 20 minutes !)

I. Quelques conversions d'unité. Seront jetés aux requins ceux qui se trompent plus d'une fois !

- (a) $0,76 \text{ m}^3$ en litres.
- (b) $2,7 \text{ cL}$ en cm^3
- (c) $c_V = 0,385 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$ en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- (d) $\rho = 4500 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ en $\text{kg} \cdot \text{cm}^{-3}$.

2. Enoncer *précisément* les deux principes de la thermodynamique.

3. Un calorimètre aux parois athermanes contient initialement une masse $m_1 = 500 \text{ g}$ d'eau à $T_1 = 20^\circ\text{C}$ à l'équilibre thermique avec lui. On y ajoute $m_2 = 200 \text{ g}$ d'eau à $T_2 = 80^\circ\text{C}$.

- (a) On néglige la capacité thermique du calorimètre : calculer la valeur numérique de la température T_f du mélange à l'équilibre.
- (b) On mesure, à cause de la capacité thermique C du calorimètre, une température d'équilibre T'_f différente : est-elle supérieure ou inférieure à T_f ? Comment calculer C à partir de la valeur mesurée de T'_f et des données de l'énoncé ?

Exercice I - Compressions dans un piston

Un gaz parfait est enfermé dans un cylindre vertical à l'intérieur duquel coulisse sans frottement un piston de surface σ . On suppose que les parois sont diathermanes (elles permettent les transferts thermiques).

Données :

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Variables thermodynamiques à l'état initial : $P_i = P_{\text{ext}} = 1,00 \text{ bar}$, $V_i = 5,00 \text{ L}$, $T_i = T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$.
1. Faire un schéma de la situation, puis calculer la pression P_i dans le piston, initialement, en fonction de P_{ext} , de la masse m du piston, g et σ .
 2. Dans les données de l'exercice, on indique que " $P_i = P_{\text{ext}}$ ". Quelle hypothèse faut-il faire sur la masse du piston pour respecter cela ?
 3. **Première transformation.** Un opérateur appuie très lentement sur le piston, et augmente ainsi progressivement la pression jusqu'à la valeur $P_f = 10,0 \text{ bar}$.
 - (a) Quels sont les deux éléments du vocabulaire de la thermodynamique utiliseriez-vous pour décrire cette compression ? Peut-on en conclure qu'elle est isotherme ?
 - (b) Exprimer V_f en fonction d'autres variables thermodynamiques, et calculer sa valeur.
 - (c) Déterminer la température finale T_2 , ainsi que sa valeur. Puis en déduire la variation d'énergie interne au cours de la compression.
 - (d) Calculer le travail W reçu par le gaz, ainsi que le transfert thermique Q reçu, au cours de cette transformation.
 - (e) Calculer la variation d'entropie ΔS du gaz lors de cette transformation, puis en déduire l'entropie échangée S_e , et l'entropie créée S_c . La transformation est-elle réversible ? Si non, quelle est la cause de l'irréversibilité ?
 4. **Deuxième transformation.** Depuis le même état initial, on place brutalement une masse M sur le piston pour atteindre la même pression finale P_f que dans la question précédente.
 - (a) Que doit valoir M pour atteindre cette valeur de P_f ? *On ne fera pas l'application numérique, les caractéristiques géométriques du piston n'étant pas données.*
 - (b) Déterminer les nouvelles valeurs T'_f et V'_f à l'état final, une fois l'équilibre thermodynamique atteint.
 - (c) Que peut-on donc dire des variations $\Delta U'$ et $\Delta S'$ de l'énergie interne et de l'entropie, par rapport à la transformation précédente ?
 - (d) Déterminer le travail W' reçu par le gaz au cours de cette transformation, ainsi que le transfert thermique Q' reçu.
 - (e) Déterminer $\Delta S'$, l'entropie échangée S'_e et l'entropie créée S'_c . La transformation est-elle réversible ? Si non, quelle est la cause de l'irréversibilité ?
 5. Montrer que $W' = W + T_{\text{ext}} S'_c$. Commenter le travail que doit fournir l'opérateur lorsqu'il y a création d'entropie. Qu'est-ce que cela implique pour la réalisation d'une machine thermique fonctionnant avec des pistons ?

Exercice 2 - La piscine (Résolution de problème)

Résolution de problème ! A vous de vous débrouiller pour calculer ce qui est demandé. Vous avez carte blanche pour définir les notations comme vous le souhaitez. **Tout résultat doit être démontré**, à l'exception de la relation fondamentale de l'hydrostatique, que vous pouvez prendre pour acquise.

Les vacances d'été se rapprochent petit à petit...Votre professeur s'impatiente : il pourra bientôt se prélasser dans une piscine rectangulaire **hors-sol** (pas enterrée) de 2 m de large, de 10 m de long, et de 1,20 m de profondeur...et faire un peu de physique avec !

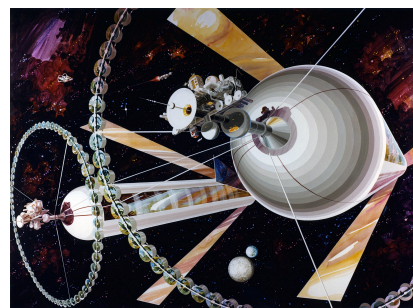
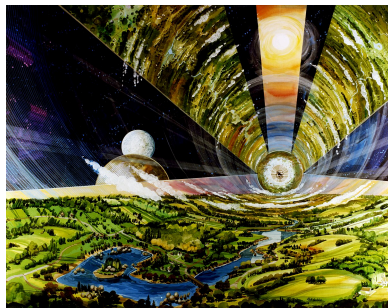
Calculer : le coût du remplissage de la piscine initialement vide, la force exercée par l'eau sur la dalle de béton sous la piscine, et la force exercée par l'eau sur chaque paroi latérale de la piscine.

Problème - Le cylindre de O'Neill

Gerard K. O'Neill (1927-1992) était un physicien et enseignant à l'université de Princeton. Il travaillait principalement sur des problématiques de physique des particules (anneaux de stockage), mais, sur son temps libre, s'intéresse à l'exploration spatiale et à la possibilité pour l'homme de vivre dans l'espace interplanétaire. Il construit une partie de ses cours de physique autour de ce thème : avec ses étudiants, ils imaginent la forme des structures spatiales qui pourraient abriter des colonies humaines. Ainsi, année après année, leur "projet" s'étoffe, et diverses problématiques trouvent des solutions : de la production de nourriture à la régulation thermique de la structure, en passant par l'organisation de la colonie et les conditions de vie !



La structure la plus prometteuse est appelée, en hommage au professeur, *cylindre de O'Neill*. Il s'agit d'un immense vaisseau cylindrique, pouvant tourner sur lui même pour "simuler la gravité" grâce aux forces d'inertie, à l'intérieur duquel de vastes surfaces agricoles et constructibles sont aménagées.

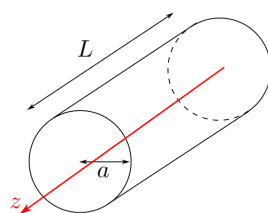


A gauche : vue d'artiste de l'intérieur du cylindre. On voit les zones habitables, très semblables à ce que nous connaissons. A droite : vue d'artiste de l'extérieur. Il y a en fait deux cylindres, pour les stabiliser lorsqu'ils sont mis en rotation. Sources des images, page Wikipedia O'Neill cylinder.

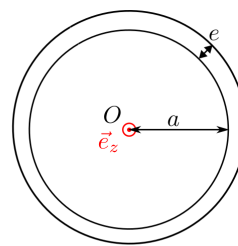
L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés physiques du cylindre de O'Neill, en particulier l'atmosphère à l'intérieur et sa régulation thermique. La partie 1 définit le cylindre, et ses caractéristiques, qui sont donc réutilisées dans toute la suite. La partie 3 requiert des résultats de la partie 2, qui sont cependant donnés par l'énoncé si vous n'avez pas réussi à les démontrer.

Partie 1 - Ordres de grandeur, gravité artificielle, mise en rotation

On modélise le cylindre de O'Neill de manière simplifiée dans ce problème : un tube cylindrique de rayon *intérieur* a , d'épaisseur e , et de longueur L , en acier. Dans un système de coordonnées cylindriques, on note $\vec{e}_z$ le vecteur directeur de l'axe du cylindre. La zone $r \in [0; a]$ est remplie d'air, dont on néglige la masse dans cette partie, et la zone $r \in [a; a + h]$ est remplie d'acier.



Modèle simplifié du cylindre de O'Neill



Vue en coupe

Données :

- Dimensions du cylindre : $a = 4,0 \text{ km}$, $e = 20 \text{ m}$, $L = 24 \text{ km}$.
- Masse volumique de l'acier : $\rho_a = 7,8 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$.
- Définition du moment d'inertie J_{Oz} d'un solide par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_{Oz} = \iiint_{\text{solide}} \rho r^2 dV$$

avec r la distance entre le point d'intégration et l'axe (Oz), et dV le volume infinitésimal autour du point d'intégration.

1. Calculer la surface intérieure du cylindre, en km^2 , et son volume intérieur en m^3 . Si on suppose que 30% de la surface intérieure est dédiée aux fenêtres (et sont donc non habitables), déterminer la surface habitable et donner un élément de comparaison pour illustrer son ordre de grandeur.
2. A l'aide d'un calcul d'intégrale, déterminer la masse M_C du cylindre de O'Neil.

Pour créer une "gravité artificielle", on peut mettre en rotation le cylindre sur lui-même à une vitesse angulaire ω constante par rapport à l'axe (Oz), dans le référentiel de Copernic. L'accélération centrifuge subie par les habitants est alors interprétée comme leur "poids".

3. On considère un habitant du cylindre sur la surface intérieure (donc $r = a$). Exprimer son vecteur accélération en coordonnées cylindriques. Représenter, sur un schéma, ce vecteur accélération.
4. Le cylindre tourne sur lui-même de $2,8^\circ$ toutes les secondes. En déduire la valeur de ω en radians par seconde, puis la valeur de la composante radiale de l'accélération de l'habitant. Est-ce qu'il a l'impression de "ressentir la même gravité que sur Terre" ?
5. Calculer ω_{Terre} tel que l'habitant semble ressentir la pesanteur terrestre à Paris, et la période de rotation associée.

Mettre en rotation le cylindre n'est pas une mince affaire. On souhaite estimer l'énergie cinétique de rotation du cylindre.

6. Montrer que le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe (Oz) s'écrit

$$J_{Oz} = \frac{1}{2} \rho \pi L ((a + e)^4 - a^4)$$

et faire l'application numérique.

7. En déduire l'énergie $\mathcal{E}$ qu'il a fallu dépenser pour mettre en rotation le cylindre à ω tel que défini dans la question 4. Est-ce qu'il sera nécessaire, une fois la "vitesse de croisière" atteinte, de continuer de dépenser de l'énergie pour entretenir la rotation ?

Partie 2 - Atmosphère dans le cylindre de O'Neill

On s'intéresse désormais à l'atmosphère dans le cylindre de O'Neill. En raison de la rotation du cylindre, le gaz n'est pas réparti de manière homogène : la pression est plus élevée au niveau des bords que de l'axe du cylindre, ce qui permet de "simuler" l'atmosphère terrestre !

Un mot sur le choix du référentiel. Dans toute cette partie, on se place dans le référentiel lié au cylindre, **qui n'est pas galiléen**. On admet que les lois de la mécanique (et donc de la statique des fluides) que vous connaissez restent valables à la condition suivante : il faut rajouter les *forces d'inertie* dans le bilan des forces. Dans ce problème, ces forces ont pour expression

$$\vec{F}_i = m r \omega^2 \vec{e}_r$$

avec m la masse du point matériel subissant la force, ω la vitesse angulaire du cylindre, et r la distance entre le point matériel et l'axe de rotation (Oz).

On néglige toute force d'attraction gravitationnelle "vraie" dans cette partie : le cylindre se trouve dans l'espace, et les forces que les planètes/le Soleil exercent sur son atmosphère sont négligeables devant le reste !

Données :

- L'air est assimilé à un gaz parfait.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Vitesse angulaire du cylindre : $\omega = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Masse molaire de l'air : $M_a = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Indice adiabatique de l'air : $\gamma = 1,4$.

8. Démonstration de l'équation fondamentale de la statique des fluides.

- Faire un schéma d'un élément de volume infinitésimal en coordonnées cylindriques situé en (r, θ, z) , et justifier que $dV = r dr d\theta dz$.
- On note P la pression, et on suppose qu'elle ne dépend que de r dans toute la suite. Calculer les forces de pression $\vec{F}_p(r)$ et $\vec{F}_p(r + dr)$ s'appliquant sur les deux faces de la particule fluide de volume dV , en fonction notamment de la pression en ces deux points.
- Justifier que la force d'inertie subie par la particule fluide s'écrit

$$\vec{F}_i = \rho r \omega^2 dV \vec{e}_r$$

avec ρ sa masse volumique.

- En déduire l'équation fondamentale de la statique des fluides dans le cylindre :

$$\frac{dP}{dr} = \rho r \omega^2$$

9. Atmosphère isotherme dans le cylindre.

On suppose dans cette question que la température T de l'air dans tout le cylindre est constante et uniforme. On donne $T = 293 \text{ K}$.

- Exprimer la masse volumique ρ de l'air en fonction notamment de la pression.
- Démontrer que

$$P(r) = P_0 e^{-K(a^2 - r^2)}$$

avec $P_0 = P(r = a)$, et préciser l'expression de K en fonction de M , ω , R et T , ainsi que sa valeur numérique.

- On suppose que $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ pour simuler les conditions terrestres. Calculer $P(r = 0)$

10. Masse de l'atmosphère isotherme.

- Exprimer la quantité de matière dn contenue dans un volume infinitésimal dV de l'atmosphère du cylindre, en fonction notamment de $P(r)$.
- Montrer alors que la quantité de matière n_{tot} d'air contenu dans le cylindre est :

$$n_{\text{tot}} = \int_0^a \frac{2\pi L P_0}{RT} \cdot r e^{-K(a^2 - r^2)} dr$$

- En déduire la masse m_{tot} totale de l'atmosphère du cylindre, et faire l'application numérique.

II. **Modèle d'atmosphère adiabatique.** On raffine le modèle d'atmosphère, en supposant maintenant que la température $T(r)$ de l'air dépend de r . On suppose que toutes les transformations thermodynamiques subies par une particule fluide de l'atmosphère sont adiabatiques.

- (a) Justifier qu'on peut utiliser les lois de Laplace, et donner la relation mettant en jeu P et T .
 (b) En différenciant (*on se rappelle que c'est comme dériver !*), montrer que

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

- (c) En déduire que

$$\frac{dT}{dr} = 2\beta r$$

et exprimer β en fonction de M , ω , R et γ .

- (d) Déterminer $T(r)$. On notera $T_0 = T(r = a)$.
 (e) En déduire la pression $P(r)$ dans l'atmosphère adiabatique. Puis calculer la valeur numérique de $P(r = 0)$, et comparer avec la valeur pour l'atmosphère isotherme.

Partie 3 - Alerte astéroïde !

Une crainte légitime pour la colonie habitant le cylindre de O'Neill est celle de la destruction d'une partie de la coque, entraînant une fuite de l'atmosphère et donc le décès de tous les habitants. Le but de cette partie est d'estimer le temps dont disposent les équipes techniques pour réparer un trou de diamètre conséquent, avant que toute la colonie ne soit mise en danger.

On suppose que le trou, issu de l'impact d'un petit astéroïde ou d'un débris spatial, est circulaire et de rayon $b = 1,0$ m. On suppose que la pression au voisinage du trou n'est pas affectée par sa présence, et vaut $P_0 = 1,0$ bar. La température de l'air vaut $T = 293$ K.

12. En raisonnant à l'échelle microscopique, déterminer le nombre δN de molécules de gaz quittant le vaisseau pendant une durée infinitésimale dt , en fonction de b , de la quantité de matière $n_{\text{tot}}(t)$ d'air contenue dans le cylindre à l'instant t , du volume V du cylindre et de la vitesse quadratique moyenne v^* de l'air.
 13. En déduire l'équation différentielle dont n_{tot} est solution

$$\frac{dn_{\text{tot}}}{dt} + \frac{1}{\tau} n_{\text{tot}} = 0$$

Préciser l'expression de τ .

14. Estimer la durée nécessaire pour que la moitié de l'air ait quitté le cylindre. Commenter.

Partie 4 - Régulation thermique de la structure

Une problématique majeure de l'ingénierie spatiale est la régulation thermique : dans l'espace, il n'y a ni convection, ni diffusion thermique, et les systèmes doivent se contenter du rayonnement thermique pour évacuer l'énergie excédentaire. A l'inverse, il est difficile, en l'absence du rayonnement solaire, de réchauffer un vaisseau spatial habité. Le but de cette section est de faire un bilan thermique simplifié sur la coque du cylindre de O'Neill pour vérifier que la colonie ne risque pas de surchauffer ou de geler.

Données :

- **Pertes thermiques par rayonnement.** Un corps de température T effectue un transfert thermique avec l'extérieur sous la forme de rayonnement électromagnétique. La puissance de ce

transfert thermique suit la *loi de Stefan* :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\sigma S T^4$$

avec S la surface extérieure du corps, et $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ [unité SI] la constante de Stefan-Boltzmann.

- Le *flux solaire moyen terrestre* Φ_0 est la puissance thermique reçue, par unité de surface, par un corps parfaitement absorbant proche de l'orbite terrestre exposé à la lumière du Soleil. $\Phi_0 = 1,3 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$.
- Capacité thermique massique de l'acier : $c_a = 470 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- On redonne la masse volumique de l'acier : $\rho_a = 7,8 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$.

On suppose que le cylindre est éclairé par le Soleil sur sa face latérale, et que la face opposée est en permanence plongée dans l'obscurité. Il se situe sur une orbite très proche de celle de la Terre.

15. **Température d'équilibre de la face éclairée du cylindre.** On suppose qu'il n'y a aucun transfert thermique entre la face éclairée et la face sombre du cylindre.
 - (a) Justifier que la surface éclairée par le Soleil est $S = L(a + 2e)$, et en déduire la puissance thermique $\mathcal{P}_S$ reçue par le cylindre grâce au Soleil.
 - (b) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{ray}}$ perdue par le cylindre par rayonnement électromagnétique. *Attention, la surface n'est peut-être pas la même que celle de la question précédente...*
 - (c) Appliquer le premier principe de la thermodynamique au cylindre entre deux états d'équilibre séparés par une durée Δt .
 - (d) Que peut-on dire de la variation d'énergie interne ΔU du cylindre si les deux états d'équilibre thermique sont identiques ? En déduire la *température d'équilibre* T_{eq} du cylindre, dans cette situation. Faire l'application numérique : est-ce que cette température semble acceptable ?
 - (e) Calculer la température d'équilibre si, cette fois-ci, le cylindre se situe sur une orbite proche de Mars ($\Phi = 580 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$). Commenter sur la stratégie à adopter pour coloniser le Système Solaire avec des cylindre de O'Neill.
16. **Diminution quotidienne de la température de la face non éclairée.** La face non éclairée ne reçoit pas de flux solaire : elle perd donc en permanence de l'énergie et se refroidit. L'énergie gagnée par la face éclairée peut y être redirigée, mais cela prend du temps : on souhaite donc estimer la diminution de température de la face sombre pendant $\Delta t = 24 \text{ h}$.
 - (a) Exprimer la puissance rayonnée par la face sombre. Puis exprimer la capacité thermique C de la face sombre en fonction de ρ_a , c_a , et des paramètres géométriques.
 - (b) Exprimer la variation de température $dT = T(t + dt) - T(t)$ entre deux états d'équilibre séparés par la durée infinitésimale dt en fonction des paramètres du problème.
 - (c) On note $T_i = T(t = 0) = 293 \text{ K}$ et $T_f = T(t = \Delta t)$. En procédant par séparation des variables, calculer T_f , puis $\Delta T = T_f - T_i$ et faire l'application numérique. Commenter.

Pour aller plus loin après le DS : vous pouvez consulter un article d'O'Neill, *The colonization of Space*, *Physics Today*, 27(9):32-40 (September, 1974), *American Institute of Physics.*, qui a inspiré ce problème, retranscrit sur la page accessible via le QRCode ci-contre. On pourra également lire le livre du même auteur *The High Frontier : Human Colonies in Space* (en anglais !).

