Devoir Surveillé 7 - Corrigé

Question de cours

Voir...le cours !

Exercice 1 - Destruction d'une tour

1. Un raisonnement énergétique semble plus adapté ici. On souhaite obtenir une équation différentielle, donc on utilisera le théorème de la puissance mécanique. Le centre de gravité de la tour se trouvant à la moitié de OA, son altitude est $z_G = \frac{L}{2}\cos\theta$. De plus, la tour est animée seulement d'un mouvement de rotation autour de l'axe (Oy), ce qui permet de calculer facilement son énergie cinétique. Ainsi,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J_y\dot{\theta}^2 + \frac{MgL}{2}\cos\theta$$

En l'absence de frottements, le théorème de la puissance mécanique s'écrit alors

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = J_y\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{MgL}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

et, avec $J_y = \dfrac{ML^2}{3}$,

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{3g}{2L}\sin\theta = 0}$$

Pour obtenir la deuxième équation, deux méthodes :

- On multiplie l'équation précédente par $\dot{\theta}$ et on intègre, ce qui donne

$$\int_0^t \dot{\theta}\ddot{\theta}\,dt = \frac{3g}{2L}\int_0^t \sin(\theta)\dot{\theta}\,dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(0)\right) = \frac{3g}{2L}\left(\cos(\theta(0) - \cos(\theta(t))\right)$$

et avec les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$,

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)}$$

- On peut utiliser le théorème de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et t quelconque :

$$\Delta E_m = 0 \quad\Longrightarrow\quad E_m(0) = E_m(t) \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{MgL}{2}\cos\theta = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2(0) + \frac{MgL}{2}\cos\theta(0)$$

ce qui donne la même équation en utilisant les conditions initiales.

2. Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oy),

$$\vec{v}_M = OM\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{v}_G = \frac{L\dot{\theta}}{2}\,\vec{e}_\theta}$$

On obtient l'accélération en dérivant (attention, $\vec{e}_\theta$ n'est pas un vecteur constant !) :

$$\boxed{\vec{a}_G = \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\,\vec{e}_r\right)}$$

3. - **Système :** tour.

- **Référentiel :** terrestre, supposé galiléen.
- **Bilan des forces :**
  - Poids $\vec{P} = -Mg\,\vec{e}_z = Mg(\sin\theta\,\vec{e}_\theta - \cos\theta\,\vec{e}_r)$.
  - Réaction du support : $\vec{R} = R_r\,\vec{e}_r + R_\theta\,\vec{e}_\theta$.

Le PFD donne alors

$$M\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$$

en faisant attention à bien préciser que c'est l'accélération de G qui intervient ! En projetant dans la base polaire, on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} -\dfrac{LM}{2}\dot{\theta}^2 & = R_r - Mg\cos\theta \\ \dfrac{LM}{2}\ddot{\theta} & = R_\theta + Mg\sin\theta \end{cases}$$

Il reste alors à remplacer les expressions de la question 1. pour $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$:

$$\boxed{R_r = Mg\cos\theta - \frac{ML}{2}\frac{3g}{L}(1-\cos\theta) = \frac{Mg}{2}\left(5\cos\theta - 3\right)}$$

et

$$\boxed{R_\theta = -Mg\sin\theta + \frac{ML}{2}\frac{3g}{2L}\sin\theta = -\frac{Mg}{4}\sin\theta}$$

4. La barre est homogène de longueur x, donc par proportionnalité,

$$\frac{m(x)}{M} = \frac{x}{L}$$

et donc $\boxed{m(x) = \dfrac{Mx}{L}}$. *On peut aussi introduire la densité linéique de masse $\mu = M/L$ constante car la barre est homogène, et en déduire $m(x) = \mu x$.* Il suffit alors de remplacer dans la définition du moment d'inertie :

$$\boxed{j_y(x) = \frac{M}{3L}x^3}$$

5. On réécrit le PFD, mais cette fois-ci applique à OB. Son centre de masse se situe au milieu du segment $[OB]$, c'est-à-dire en $x/2$. On en déduit l'accélération en adaptant le résultat de la question 2. :

$$\vec{a} = \frac{x}{2}\left(\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\,\vec{e}_r\right)$$

Le bilan des forces donne :

- Le poids $\vec{P} = m(x)\vec{g} = m(x)g\,(\sin\theta\,\vec{e}_\theta - \cos\theta\,\vec{e}_x)$.
- La réaction du support $\vec{R} = R_r\,\vec{e}_r + \vec{R}_\theta\,\vec{e}_\theta$.
- La force supplémentaire $\vec{F} = F_N\,\vec{e}_r + F_T\,\vec{e}_\theta$

Le PFD s'écrit alors, en projection sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ respectivement:

$$\begin{cases} -\dfrac{mx\dot{\theta}^2}{2} & = -mg\cos\theta + R_r + F_N \\ +\dfrac{mx\ddot{\theta}}{2} & = mg\sin\theta + R_\theta + F_T \end{cases}$$

Il suffit alros d'isoler F_N et F_T :

$$\boxed{\begin{cases} F_N &= mg\cos\theta - R_r - \dfrac{mx\dot\theta^2}{2} \\ \\ F_T &= -mg\sin\theta + \dfrac{mx\ddot\theta}{2} - R_\theta \end{cases}}$$

6. Aucune difficulté de principe, il faut juste remplacer $\dot\theta$, $\ddot\theta$ et m par leurs expressions :

$$\begin{aligned} F_N &= mg\cos\theta - \frac{mx}{2}\frac{3g}{L}(1-\cos\theta) - \frac{Mg}{2}(5\cos\theta - 3) \\ &= \frac{Mx}{L}\cos\theta - \frac{3gMx^2}{2L^2}(1-\cos\theta) - \frac{Mg}{2}(5\cos\theta-3) \end{aligned}$$

et après factorisation,

$$\boxed{F_N = \frac{Mg}{2L^2}\left[2xL\cos\theta - 3x^2(1-\cos\theta) - L^2(5\cos\theta-3)\right]}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} F_T &= -\frac{Mx}{L}g\sin\theta + \frac{Mx}{L}\frac{x}{2}\frac{3g}{2L}\sin\theta + \frac{1}{4}Mg\sin\theta \\ &= -\frac{Mg}{L}x\sin\theta + \frac{Mg}{4L^2}3x^2\sin\theta + \frac{Mg}{4}\sin\theta \end{aligned}$$

soit, en factorisant,

$$\boxed{F_T = \frac{Mg\sin\theta}{4L^2}\left[-4xL + 3x^2 + L^2\right]}$$

7. On commence par faire le bilan des moments des forces appliqués à $[OB]$, par rapport à l'axe (Oy) :

- $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{R}) = 0$ car cette force s'applique en O.
- $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) = \frac{1}{2}mgx\sin\theta$, car le bras de levier vaut $\frac{x}{2}\sin\theta$.
- $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F_N}) = 0$ car $\vec{F}_N$ s'exerce parallèlement à la barre.
- $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F_T}) = F_T x$ avec le bras de levier.
- Enfin, il reste le couple de cisaillement Γ.

De plus, le moment cinétique du segment $[OB]$ par rapport à l'axe (Oy) s'écrit

$$L_{Oy} = j\dot\theta = \frac{Mx^3}{3L}\dot\theta$$

Le théorème du moment cinétique donne alors

$$\frac{dL_{Oy}}{dt} = \frac{Mx^3}{3L}\ddot\theta = \frac{1}{2}mgx\sin\theta + F_T x + \Gamma$$

On peut alors isoler Γ :

$$\Gamma = \frac{Mx^3}{3L}\ddot\theta - \frac{1}{2}mgx\sin\theta - F_T x$$

Enfin, il reste à remplacer $\ddot{\theta}$ et F_T par leurs expressions, et simplifier autant que possible. Vu la forme compacte du résultat final, il y a tout intérêt à *factoriser* autant que possible.

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{Mx^3}{3L}\frac{3g}{2L}\sin\theta - \frac{Mgx^2}{2L}\sin\theta - \frac{Mgx\sin\theta}{4L^2}\left[-4xL+3x^2+L^2\right] \\
&= \frac{Mgx^3\sin\theta}{2L^2} - \frac{Mgx^2}{2L}\sin\theta - \frac{Mg\sin\theta}{4L^2}\left[-4x^2L+3x^3+L^2x\right] \\
&= -\frac{Mg\sin\theta}{4L^2}\left[-2x^3+2Lx^2-4x^2L+3x^3+L^2x\right] \\
&= -\frac{Mg\sin\theta}{4L^2}\left[x^3-2Lx^2+L^2x\right] \\
&= -\frac{Mg\sin\theta}{4L^2}x\left[x^2-2Lx+L^2\right] \\
&= -\frac{Mg\sin\theta}{4L^2}x(L-x)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, on pose $\boxed{f(x) = x(L-x)^2}$, et

$$\boxed{\Gamma = -\frac{Mg\sin\theta}{4L^2}f(x)}$$

8. La rupture se produit lorsque $|\Gamma| = \Gamma_c$, c'est-à-dire

$$\frac{Mg}{4L^2}f(x)\sin\theta_c(x) = \Gamma_c \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\theta_c(x) = \arcsin\left(\frac{4L^2\Gamma_c}{Mgf(x)}\right)}$$

9. On cherche la valeur de x pour laquelle θ_c est minimal. Par croissance de $\arcsin$, cela revient à chercher la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est maximale. Il faut donc résoudre

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 4Lx + L^2 = 0$$

C'est une équation polynômiale du second degré, de discriminant

$$\Delta = 16L^2 - 12L^2 = 4L^2 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles

$$x_\pm = \frac{-(-4L)\pm\sqrt{\Delta}}{6} = \frac{4L\pm 2L}{6}$$

donc

$$x_+ = L \quad ; \quad x_- = \frac{L}{3}$$

La solution x_+ n'est pas physique (on ne peut pas casser la tour a son extrémité !), ainsi, la tour se brisera au tiers de sa hauteur :

$$\boxed{x = \frac{L}{3}}$$

Exercice 2 - Voile solaire

1. $\boxed{\mathcal{P} = \Phi S}$ vu la définition de Φ. Comme la puissance est l'énergie fournie par unité de temps, $\boxed{\delta E = \Phi S\, dt}$.
2. Chaque photon apporte une énergie $h\nu$, on peut donc exprimer $\delta E = \delta N \cdot h\nu$ avec δN le nombre de photons frappant le miroir pendant dt. Ainsi,
$$\boxed{\delta N = \frac{\Phi S}{h\nu}\, dt}$$
3. Σ est un système thermodynamique fermé (d'ailleurs, ses parois ne sont pas fixes !). Lorsqu'un photon est réfléchi, sa quantité de mouvement varie de
$$d\vec{p}_{\text{photon}} = \frac{h}{\lambda}(-\vec{e}_x) - \frac{h}{\lambda}\vec{e}_x = -\frac{2h}{\lambda}\vec{e}_x$$
car le photon se déplace suivant $\vec{e}_x$ avant la réflexion, et suivant $-\vec{e}_x$ après la réflexion. Pendant dt, δN photons subissent cette variation de quantité de mouvement, donc
$$d\vec{p} = \delta N\, d\vec{p}_{\text{photon}} = -\frac{\Phi S}{h\nu}\frac{2h}{\lambda}\vec{e}_x$$
Or, un photon représentant une onde monochromatique, et qu'il n'y a pas de dispersion dans le vide, $\lambda = c/\nu$, et donc
$$\boxed{d\vec{p} = -\frac{2\Phi S\, dt}{x}\vec{e}_x}$$
4. Le PFD appliqué au système Σ s'écrit :
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{miroir}/\Sigma} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{\text{miroir}/\Sigma} = -\frac{2\Phi S}{c}\vec{e}_x}$$
De plus, par la troisième loi de Newton,
$$\boxed{\vec{F}_{\Sigma/\text{miroir}} = -\vec{F}_{\text{miroir}/\Sigma} = +\frac{2\Phi S}{c}\vec{e}_x}$$
5. Par définition de la pression,
$$\boxed{P_r = \frac{\|\vec{F}_{\Sigma/\text{miroir}}\|}{S} = \frac{2\Phi}{c}}$$
Dimensionellement, Φ est une puissance par unité de surface, donc
$$[P_r] = \frac{[\Phi]}{[c]} = \frac{ML^2T^{-3} \cdot L^{-2}}{LT^{-1}} = MLT^{-2} \cdot L^{-2} = [F]L^{-2}$$
ce qui est bien la dimension d'une pression.
6. L'application numérique donne
$$\|\vec{F}\| = 4{,}5391 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$$
Attention a bien respecter le nombre de chiffres significatifs ! C'est une force très faible, mais au cours du temps, comme $\vec{a} = \vec{F}/m$, la vitesse de la voile peut devenir conséquente en l'absence d'autres forces ! Il faut toutefois, pour pouvoir s'éloigner du Soleil, que cette force dépasse la force d'attraction gravitationnelle du Soleil :
$$\frac{\mathcal{G}M_S m_{\text{max}}}{d_{TS}^2} = \frac{PhiS}{c} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m_{\text{max}} = \frac{PhiSd_{TS}^2}{\mathcal{G}cM_S} = 7{,}66 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}}$$
soit...76 grammes ! Il faut donc une voile extrêmement fine, faite dans un matériau très peu dense (ou alors, la propulser plus loin du Soleil avec des méthodes conventionnelles avant qu'elle ne puisse s'éloigner avec la pression de radiation seule).

7. L'exposant 2 vient du fait que toute l'énergie émise par le Soleil l'est de façon isotrope, et donc qu'elle se "dilue" sur la surface d'une sphère. Ainsi, la puissance par unité de surface diminue lorsque la surface de cette sphère augmente, c'est-à-dire en r^2. L'application numérique donne, en négligeant le rayon du Soleil devant d_{TS} :
$$\Phi_0 = \Phi d_{TS}^2 = 3{,}0454 \cdot 10^{22}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$$
On constate néanmoins que
$$\frac{F_r}{F_{\text{grav}}} = \frac{\Phi S}{c}\cdot\frac{r^2}{\mathcal{G}mM_S} = \frac{\Phi_0 S}{r^2 c}\cdot\frac{r^2}{\mathcal{G}mM_S} = \frac{\Phi_0 S}{\mathcal{G}cmM_S} = \text{cste}$$
Le rapport entre les deux forces reste constant à mesure que la voile s'éloigne.

8. Le principe même de la pression de radiation ne permet que de s'éloigner du Soleil : impossible *a priori* de visiter les planètes plus proches du Soleil que la Terre avec une voile solaire. On peut toutefois trouver des solutions : par exemple, "rentrer" la voile solaire et utiliser des carburants conventionnels pour se rapprocher, ou alors réaliser des manœuvres de type "fronde gravitationnelle" autour des géantes gazeuses (des trajectoires hyperboliques pendant lesquelles le satellite accélère en "prenant" de l'énergie cinétique à la planète), en s'étant rapproché de ces dernières avec la voile solaire.

9. Sur le schéma, on voit que la surface "effective" recevant les rayons lumineux est plus petite, car inclinée d'un angle θ :
$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}(\theta = 0)\cos\theta = \Phi S\cos\theta}$$
On vérifie la cohérence : lorsque $\theta = 0$, la puissance est maximale, et plus θ se rapproche de π/S, plus la puissance reçue est faible. La voile récupère donc une énergie
$$\boxed{\delta E = \Phi S\cos\theta\, dt}$$

10. Lors du choc, la composante selon y de la quantité de mouvement du photon est conservée, c'est seulement celle suivant x qui est modifiée. Ainsi, en projetant,
$$d\vec{p} = dp_x\,\vec{e}_x = -\frac{2h}{\lambda}\cos\theta\,\vec{e}_x$$
On en déduit que, pour tous les photons venant frapper le miroir entre t et $t + dt$ (système Σ défini plus tôt dans l'exercice), contenant $\delta N = \delta E/h\nu$ photons,
$$d\vec{p}_\Sigma = \delta N d\vec{p} = \frac{\Phi S\cos\theta}{h\nu}\cdot\left(-\frac{2h}{\lambda}\cos\theta\,\vec{e}_x\right) = -\frac{2\Phi S dt\cos^2\theta}{c}\vec{e}_x$$
Puis en appliquant le PFD à Σ,
$$\vec{F}_{\text{miroir}/\Sigma} = \frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt} = -\frac{2\Phi S\cos^2\theta}{c}\vec{e}_x$$
et par la troisième loi de Newton,
$$\vec{F}_{\Sigma/\text{miroir}} = +\frac{2\Phi S\cos^2\theta}{c}\vec{e}_x$$
Finalement,
$$\boxed{P_r = \frac{\|\vec{F}_{\Sigma/\text{miroir}}\|}{S} = \frac{2\Phi\cos^2\theta}{c} = P_0\cos^2\theta}$$
avec $\boxed{P_0 = P_r(\theta = 0)}$ calculée au début de l'exercice. Mieux vaut placer la voile en incidence normale au flux lumineux pour maximiser l'énergie reçue.

Problème - Lancement d'un satellite de télédétection terrestre

Remarque : ce problème est très proche du cours, et donc idéal pour réviser M_6 avant les concours !

Partie 1 - Calculs préliminaires

1. La Terre tourne autour du Soleil en $T = 365\,\text{j}$, il faut donc que les phénomènes étudiés aient une durée $t << T$.
2. Seule $\vec{F} = -\dfrac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{e}_r$ s'exerce sur le satellite, et son moment par rapport à O est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = r\,\vec{e}_r \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

car c'est une force centrale. Ainsi, le théorème du moment cinétique appliqué au satellite par rapport à O donne

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{\text{cste}}}$$

3. De plus, en coordonnées polaires,

$$\vec{L}_O = r\,\vec{e}_r \wedge m\vec{v} = mr\,\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$$

Comme $\vec{e}_z$ est un vecteur constant, et qu'en toutes circonstances $\vec{v} \perp \vec{L}_O$, on en conclut que le mouvement se déroule dans le plan de vecteur normal $\vec{e}_z$. De plus, la constance de $\vec{L}_O$ implique celle de sa norme, et donc

$$mr^2\dot{\theta} = \text{cste} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}}$$

C est la *constante des aires*.

4. La force de gravitation universelle subie par un point matériel de masse m à la surface de la Terre s'écrit

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T^2}\vec{e}_r$$

Par définition (*en tout cas, pour cette année...*), cette force correspond au poids $\vec{P} = m\vec{g}_0$. En égalisant les deux forces, avec $\vec{g}_0 = -g_0\,\vec{e}_r$ à la surface de la Terre :

$$-\frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T^2}\vec{e}_r = -mg_0\,\vec{e}_r \quad \Longrightarrow \quad \boxed{g_0 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} = 9{,}72\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

Remarque hors programme : $g_0 < g$ car on a "oublié" la force centrifuge due à la rotation de la Terre, ainsi que les corrections dues à sa forme légèrement aplatie en raison de la rotation.

5. Il suffit alors de remplacer g_0 dans l'expression de la force de gravitation universelle subie par un satellite à une distance r du centre de la Terre :

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\vec{e}_r = -mg_0\frac{R_T^2}{r^2}\vec{e}_r$$

Cette force est conservative, et dérive de E_p telle que, avec comme référence des énergies $r \to +\infty$:

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r \quad \Longrightarrow \quad E_p = -\int_{+\infty}^{r} F(\tilde{r})\,d\tilde{r} = +\int_{+\infty}^{r}\frac{mg_0R_T^2}{\tilde{r}^2}d\tilde{r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_p(r) = -\frac{mg_0R_T^2}{r}}$$

6. *Très classique pour les concours un peu plus difficiles : c'est la méthode la plus rapide pour démontrer la première loi de Kepler !* Il y a une petite coquille de notation : M est en fait M_T.

(a) $\vec{v} \wedge \vec{L}_O$ est orthogonal à $\vec{L}_O$, qui lui-même est orthogonal au plan du mouvement. Ainsi, ce terme vectoriel est dans le plan du mouvement. Puis, $\vec{e}_r$ étant par définition dans ce plan aussi, on peut en conclure que $\vec{A}$ est bien dans le plan du mouvement. On utilise la règle de dérivation des produits :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_O + m\vec{v} \wedge \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \mathcal{G}m^2M\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Or, $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$, et la dérivée de $\vec{L}_O$ est nulle par la loi des aires. Ainsi,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_O - \mathcal{G}m^2M\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

D'autre part, on peut utiliser le PFD pour écrire

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{e}_r$$

et donc

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{e}_r \wedge mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z - \mathcal{G}m^2M\vec{e}_\theta = -\mathcal{G}m^2M\dot{\theta}(-\vec{e}_\theta) - -\mathcal{G}m^2M\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = \vec{0}$$

(b) On a avec $\vec{OM} = r\,\vec{e}_r$:

$$\vec{A} \cdot \overrightarrow{OM} = (m\vec{v} \wedge \vec{L}_O) \cdot r\,\vec{e}_r - \mathcal{G}m^2M\vec{e}_r \cdot r\,\vec{e}_r$$

Le produit scalaire du terme de droite vaut 1, et on peut utiliser le produit mixte pour simplifier

$$(m\vec{v}\wedge\vec{L}_O)\cdot r\,\vec{e}_r = mr(\vec{e}_r\wedge\vec{v})\cdot\vec{L}_O = mr(\vec{e}_r\wedge\dot{r}\,\vec{e}_r+\vec{e}_r\wedge r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)\cdot mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z = m^2r^4\dot{\theta}^2\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = m^2r^4\dot{\theta}^2 = m^2C^2$$

En remplaçant,

$$\vec{A} \cdot \overrightarrow{OM} = m^2C^2 - \mathcal{G}m^2M$$

L'énoncé demande de faire intervenir L_O, on peut donc remplacer $L_O = mC$ de sorte que

$$\boxed{\vec{A} \cdot \overrightarrow{OM} = L_O^2 - \mathcal{G}m^2Mr}$$

(c) Par définition du produit scalaire et de l'angle θ, $\vec{A} \cdot \overrightarrow{OM} = \|\vec{A}\|\|\overrightarrow{OM}\|\cos\theta$, et donc

$$L_O^2-\mathcal{G}m^2Mr = rA\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad r(A\cos\theta+\mathcal{G}m^2M) = L_O^2 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{G}m^2Mr\left(1+\frac{A}{\mathcal{G}m^2M}\right) = L_O^2$$

Il faut alors définir

$$\boxed{p = \frac{L_O^2}{\mathcal{G}m^2M} \quad ; \quad e = \frac{A}{\mathcal{G}m^2M}}$$

pour identifier

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

Il s'agit de l'équation polaire d'une conique (avec $e > 0$).

- Si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole.
- Si $e = 1$, la trajectoire est une parabole.
- Si $e < 1$, la trajectoire est un cercle.

Partie 2 - Mise en orbite circulaire basse

7. En coordonnées polaires, avec $\dot{r} = 0$ car la trajectoire est circulaire,

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

On pose alors $v = r\dot{\theta}$ de sorte que $\boxed{\vec{v} = v\,\vec{e}_\theta}$. Ensuite, on peut dériver le vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\,\vec{e}_r - v\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

et donc, avec $v = r\dot{\theta}$,

$$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r}\,\vec{e}_r}$$

On reconnaît l'expression de l'accélération habituelle, ou dans le repère de Frénet avec $\vec{e}_n = -\vec{e}_r$.

8. Le PFD appliqué au satellite, avec seulement la force d'interaction gravitationnelle, donne

$$\begin{cases} -\dfrac{mv^2}{r} & = -\frac{mg_0R_T^2}{r^2} \\ \dot{v} = 0 \end{cases}$$

Le mouvement est donc uniforme car $\dot{v} = 0$. La première équation permet de déterminer la valeur de v :

$$\boxed{v^2 = \frac{g_0R_T^2}{r}}$$

9. Par définition,

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg_0R_T^2}{2r}}$$

puis

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{mg_0R_T^2}{2r} - \frac{mg_0R_T^2}{r} = -\frac{mg_0R_T^2}{2r} < 0}$$

On retrouve le théorème du viriel : $E_c = -E_p/2$ et donc $E_m = E_p/2$.

10. L'application numérique est immédiate :

$$\boxed{E_m(r_b) = -1{,}0 \cdot 10^{11}\ \text{J} \quad ; \quad E_m(r_h) = -2{,}0 \cdot 10^{10}\ \text{J}}$$

On vérifie que $E_m(r_h) > E_m(r_b)$.

Partie 3 - Etude énergétique du satellite

11. Cette fois-ci, $\dot{r}$ n'est pas forcément nul. On a donc $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, et donc

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{g_0mR_T^2}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{g_0mR_T^2}{r}$$

On pose donc $\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{g_0mR_T^2}{r}}$.

12. $\dot{r}^2 > 0$, donc nécessairement $E_m \geq E_{p,\text{eff}}(r)$. Cette inégalité permet d'obtenir l'intervalle dans lequel r varie.

13. Voir le cours pour le tracé et les conditions : la trajectoire est hyperbolique si $E_m > 0$, elliptique si $E_m < 0$, et parabolique si $E_m = 0$.

Partie 4 - Passage de l'orbite circulaire basse à l'orbite circulaire haute

14. $\dot{r} = 0$ car r est extrémale pour ces deux points. Sur le schéma, on remarque que $2a = r_h + r_b$, et donc

$$\boxed{a = \frac{r_h + r_b}{2}}$$

15. L'énergie mécanique est conservée, donc $E_m(r_h) = E_m(r_b)$. Or, en notant $r_i = r_h$ ou r_b, avec $\dot{r} = 0$ à ces points :

$$E_m = E_{p,\text{eff}}(r_i) = \frac{mC^2}{2r_i^2} - \frac{g_0 m R_T^2}{r_i} \quad \Longrightarrow r_i^2 E_m = \frac{mC^2}{2} - g_0 R_T^2 r_i$$

On en déduit que r_h et r_b sont racines de l'équation

$$\boxed{r^2 + \alpha r + \beta = 0 \quad ; \quad \alpha = \frac{g_0 m R_T^2}{E_m} \quad ; \quad \beta = -\frac{mC^2}{2E_m}}$$

16. On peut chercher les racines avec le discriminant, mais on peut également faire preuve d'astuce, et se souvenir que pour une cette équation polynômiale,

$$\alpha = -\sum(\text{racines}) = -r_h - r_b$$

ainsi,

$$r_h + r_b = -\frac{g_0 m R_T^2}{E_m}$$

D'autre part,

$$a = r_h + r_b$$

Il en découle que

$$\boxed{E_m = -\frac{g_0 m R_T^2}{2a}}$$

17. On sait que, sur l'orbite de transfert, $r \in [r_b; r_h]$. On peut donc tracer une droite $E_{p,\text{eff}} = E_m$ coupant la courbe de l'énergie potentielle effective sur l'orbite de transfert en r_b et r_h. Cela donne $\boxed{E_{m,t} = -35\,\text{GJ}}$.

18. L'orbite est circulaire si E_m correspond au minimum de $E_{p,\text{eff}}$. On lit donc $\boxed{E_{m,b} = -1{,}0 \cdot 10^2\,\text{GJ}}$ et $\boxed{E_{m,h} = -20\,\text{GJ}}$. *Ce qui correspond aux résultats de la question 10 !*

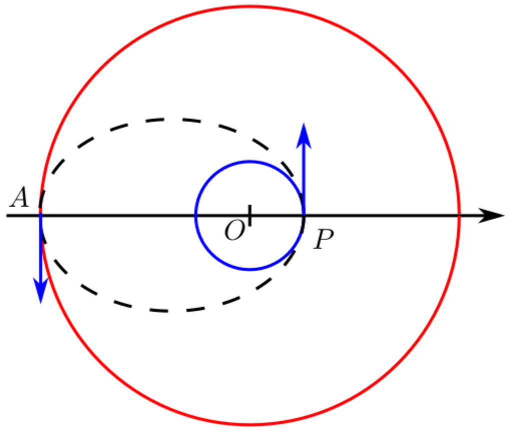
19. On a directement $\boxed{\Delta E_{m,b\to t} = E_{m,t} - E_{m,b} = 65\,\text{GJ}}$.

20. $\mathscr{E}$ est l'énergie récupérée par la combustion d'un kilogramme de carburant. On peut donc calculer la masse $\mathcal{M}_c$ de carburant consommée par la manœuvre avec

$$\boxed{\mathcal{M}_c = \frac{\Delta E_{m,b\to t}}{\mathscr{E}} = 1{,}3 \cdot 10^3\,\text{kg}}$$

ce qui est supérieur à la masse du satellite !

21.



Les sens sont déterminés par le fait qu'il faut accélérer en quittant P (car l'ellipse de transfert correspond à une énergie mécanique supérieure à l'orbite basse), et accélérer à nouveau pour quitter l'ellipse de transfert pour l'orbite haute.

Partie 5 - Chute du satellite vers la Terre

22. L'orbite étant circulaire, son périmètre vaut $2\pi r$, donc

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{g_0 R_T^2}}$$

Cette équation se réécrit sous la forme

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}}$$

C'est la troisième loi de Kepler !

23. On écrit le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}) = -\alpha\vec{v}\cdot\vec{v} = -\alpha v^2$$

En remplaçant E_m et v par leurs expressions,

$$-\frac{m g_0 R_T^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\alpha g_0 R_T^2}{r} \quad\Longrightarrow\quad \frac{m}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{\alpha}{r}$$

et donc en réarrangeant

$$\boxed{\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau}r = 0 \quad ; \quad \tau = \frac{m}{2\alpha}}$$

τ a bien la dimension d'un temps : c'est le temps caractéristique de décroissance du rayon de l'orbite. *On s'attend donc à ce que sa valeur soit très élevée.*

24. L'équation se résout aisément : $\boxed{r(t) = r_0 e^{-t/\tau}}$, la courbe est une exponentielle a argument négatif, qui atteint 0 en environ 5τ. α augmente au cours de l'évolution de la trajectoire, cependant : plus le satellite descend, et plus l'atmosphère devient dense, ce qui augmente l'effet des frottements. Pour résoudre rigoureusement l'équation, il faudrait un modèle d'atmosphère pour estimer $\alpha(r)$.

25. D'après les données, le satellite descend de $\Delta r = 1\,\mathrm{m}$ entre t et $t+T$ (T étant le temps nécessaire pour faire une orbite). On en déduit

$$r_0 - \Delta r = r_0 e^{-T/\tau} \quad \longrightarrow \quad -\frac{T}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{1-\dfrac{\Delta r}{r_0}}\right)$$

En remplaçant τ par son expression,

$$\boxed{\alpha = \frac{m}{2T}\ln\left(\frac{1}{1-\dfrac{\Delta r}{r_0}}\right) = 1{,}2\cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

en prenant l'orbite haute comme orbite initiale ($r_0 = r_h$), pour laquelle la période vaut

$$T = \frac{4\pi^2 r_h^3}{g_0 R_T^2} = 8{,}0\cdot 10^5\,\mathrm{s}$$

Vu la faiblesse de cet effet, on peut faire l'hypothèse que Δr est le même pour chaque tour d'orbite, même si r diminue à chaque tour. Le nombre N de tours qu'il aura réalisé sera donc

$$N = \frac{10\text{ ans}}{T} = 394$$

ce qui correspond à $\Delta r \simeq 394\,\mathrm{m}$. C'est très faible devant le rayon de l'orbite, mais non négligeable ! En particulier si le satellite fait partie d'une constellation de plusieurs instruments très proches les uns des autres.