Devoir Surveillé 7

L'épreuve dure 4 heures. Le sujet est constitué de 7 pages, et comporte une question de cours, deux exercices et un problème. L'usage de la calculatrice est autorisé.

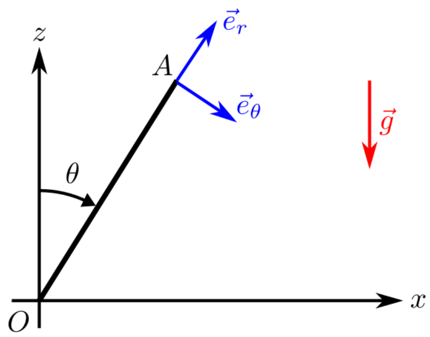
Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements comptent pour une part importante de l'évaluation de la copie, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition, en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Question de cours - interdiction d'y passer plus de 20 minutes !

1. Définir les termes suivants : fonction d'état, variable d'état intensive, libre parcours moyen. Puis rappeler la propriété fondamentale que possèdent les fonctions d'état thermodynamiques.
2. Rappeler l'expression de la vitesse quadratique moyenne d'une particule de gaz parfait, puis la définition de l'énergie interne d'un système thermodynamique. Puis déterminer son expression en fonction de la température T pour un système constitué de n moles de gaz parfait monoatomique.
3. Retrouver l'équation différentielle dont l'angle θ du pendule simple est solution, en raisonnant obligatoirement avec le **moment cinétique**.

Exercice 1 - Destruction d'une tour

Le but de cet exercice est de modéliser la chute d'une tour (assimilée à une tige verticale OA de longueur L et de masse M) qu'on a dynamitée à sa base, et de voir en quel endroit elle est le plus susceptible de se briser au cours de sa chute. On repère la tour par l'angle $\theta(t)$ qu'elle fait avec l'axe (Oz), On suppose que le mouvement de la tour est une rotation autour de l'axe (Oy) (les débris formés lors du dynamitage et les fondations l'empêchant d'avoir tout autre mouvement).



Le moment d'inertie de la tour par rapport à l'axe (Oy) est $J_y = \dfrac{1}{3}ML^2$. Les conditions initiales sont, au moment de l'explosion, $\theta(0) \simeq 0$ et $\dot{\theta}(0) \simeq 0$ (bien qu'une de ces deux constantes soit non nulle, pour permettre au mouvement de s'amorcer). On admet également que l'action du sol sur la tour se traduit par une force $\vec{R} = R_r\,\vec{e}_r + R_\theta\,\vec{e}_\theta$ appliquée en O.

1. Avec le raisonnement de votre choix, montrer que
$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}\sin\theta \quad ; \quad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)$$
2. Calculer $\vec{v}_G$ et $\vec{a}_G$, les vecteurs vitesse et accélération du centre de masse G de la tour, en fonction de L, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ dans la base polaire.
3. Ecrire la seconde loi de Newton pour la tour, et montrer que les deux composantes de $\vec{R}$ vérifient :
$$R_r = \frac{Mg}{2}(5\cos\theta - 3) \quad ; \quad R_\theta = -\frac{1}{4}Mg\sin\theta$$

Pour modéliser le risque de "casse" de la tour lors de sa chute, on doit la découper en deux par la pensée : on choisit B entre O et A, et on s'intéresse à la portion $[OB]$ de la cheminée. On note $x = OB$. La portion $[BA]$ de la cheminée agit alors sur la portion $[OB]$ à travers deux actions mécaniques :

- Une force $\vec{F} = F_N\,\vec{e}_r + F_T\,\vec{e}_\theta$, qui traduit le "poids" de la portion $[BA]$ qui s'exerce sur $[OB]$.
- Un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\,\vec{e}_y$, qui traduit les effets de cisaillement en B (la "pliure").

On note $j_y(x) = \frac{1}{3}m(x)x^2$ le moment d'inertie de $[OB]$ par rapport à l'axe (Oy).

4. Justifier que $m(x) = \dfrac{Mx}{L}$, et exprimer j_y en fonction uniquement de x, M et L.
5. En vous inspirant des calculs de la question 3, appliquer la seconde loi de Newton à $[OB]$ et exprimer F_N et F_T en fonction de x, θ et ses dérivées, m, g, R_r et R_θ.
6. Remplacer par les expressions des premières questions pour montrer que
$$\begin{cases} F_N &= \dfrac{Mg}{2L^2}\left(-3x^2(1-\cos\theta) + 2xL\cos\theta - L^2(5\cos\theta - 3)\right) \\ \\ F_T &= \dfrac{Mg\sin\theta}{4L^2}(3x^2 - 4xL + L^2) \end{cases}$$
7. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que
$$\Gamma = -\frac{Mg\sin\theta}{4L^2}f(x)$$
Préciser la fonction $f(x)$.
8. On admet que la tour se romp si $|\Gamma| > \Gamma_c$, un couple "critique" (pour la même raison qu'il est plus facile de casser un morceau de sucre en y exerçant un cisaillement : on le "plie" pour le casser, plutôt que le tordre ou l'étirer). Exprimer l'angle $\theta_c(x)$ pour lequel la rupture se produira.
9. En quel point B de la tour la rupture a-t-elle le plus de chance de se produire ? *Indication : étudier la fonction $f(x)$.*

Exercice 2 - Voile solaire

Le but de cet exercice est d'étudier un moyen "gratuit" en carburant de propulsion spatiale (ce n'est pas qu'une question économique, mais les missions sont souvent bridées par les ressources limitées que le système d'exploration emporte avec lui). La voile solaire exploite la force créée lors de la réflexion des photons solaires sur un miroir pour mettre en mouvement la sonde ou le satellite.

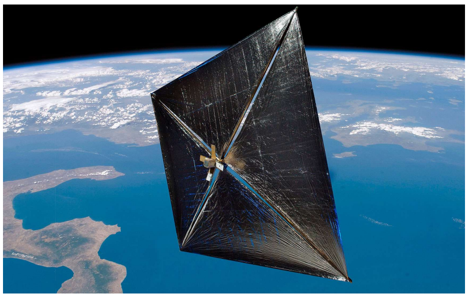


Illustration du concept de la voile solaire. Source : NASA

On modélise la voile solaire comme un miroir parfaitement réfléchissant, de surface S, que l'on étudie dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Données : avec un grand nombre de chiffres significatifs, attention à bien tous les utiliser, car certains résultats numériques requièrent une grande précision !

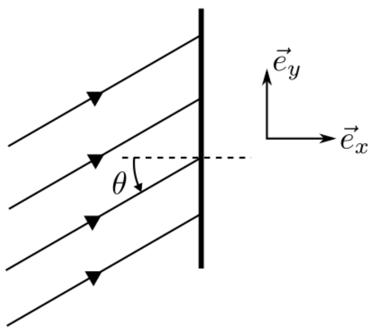
- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2kg^{-1}s^{-2}}$.
- Masse du Soleil : $M_S = 1{,}9891 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.
- Distance moyenne Terre-Soleil : $d_{TS} = 149{,}60 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$.
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

- Flux solaire moyen au niveau de l'orbite terrestre : $\Phi = 1{,}3608\,\mathrm{kW}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.
- Energie et quantité de mouvement d'un photon en fonction de sa fréquence ν ou de sa longueur d'onde λ : $E = h\nu$ et $\vec{p} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$, avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire orienté selon la direction et le sens de propagation de la lumière.
- Lorsqu'on considère la lumière comme un ensemble de photons, on pourra la traiter exactement de la même manière qu'un gaz parfait !

Dans un premier temps, on considère que la voile est immobile dans $\mathcal{R}$, et qu'elle est éclairée de manière uniforme sur toute sa surface par des faisceaux lumineux d'incidence normale (c'est-à-dire que la surface de la voile est orthogonale à la direction de propagation). On note $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire correspondant à la direction de propagation de la lumière, et on supposera que λ et ν sont inchangés à la réflexion sur le miroir. *Ce n'est en fait pas le cas, à cause de l'effet Doppler.*

1. Le flux solaire Φ est la puissance provenant du Soleil, **par unité de surface**, lorsque la surface est orthogonale à la direction de propagation de la lumière. Exprimer la puissance lumineuse totale $\mathcal{P}$ arrivant sur le miroir, puis l'énergie δE reçue par le miroir pendant un intervalle de temps dt.
2. En déduire l'expression du nombre de photons δN frappant le miroir entre t et $t = dt$.
3. On considère le système Σ constitué de tous les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t + dt$. Ce système thermodynamique est-il ouvert ou fermé ? On note $\vec{p}(t)$ la quantité de mouvement de Σ. Démontrer que
$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = -\frac{2\Phi S dt}{c}\vec{e}_x$$
4. En déduire la force exercée par le miroir sur Σ, puis la force exercée par les photons sur le miroir.
5. Finalement, donner l'expression de la *pression de radiation* P_r, qui est la pression exercée par les photons sur la voile solaire, en fonction de Φ et c. Justifier que la relation obtenue est bien homogène.
6. *Application numérique.* Calculer la force ressentie par une voile solaire de surface $S = 100{,}00\,\mathrm{m}^2$ se trouvant au niveau de l'orbite terrestre. Puis déterminer une borne supérieure m_{max} pour la voile solaire, telle que si $m < m_{\text{max}}$, la force de pression de radiation surpasse l'attraction gravitationnelle du Soleil. Commenter : qu'est-ce que cela implique sur la conception de la voile solaire ?
7. A mesure que la voile s'éloigne du Soleil, l'énergie lumineuse qu'elle reçoit décroit. On peut montrer que le flux solaire dépend de la distance r avec le Soleil comme
$$\Phi = \frac{\Phi_0}{r^2}$$
avec Φ_0 le flux lumineux émis juste à la surface du Soleil. Estimer la valeur numérique de Φ_0, et justifier l'exposant 2 de cette relation par un argument physique simple. Que peut-on dire du rapport entre la force de pression de radiation et la force d'attraction gravitationnelle du Soleil ?
8. Est-il possible d'explorer tout le système solaire avec une sonde munie d'une voile solaire comme unique moyen de propulsion ?

On considère maintenant que la voile est inclinée par rapport à la lumière incidente, d'un angle θ tel que défini sur le schéma. On suppose que les rayons sont toujours tous parallèles entre eux.

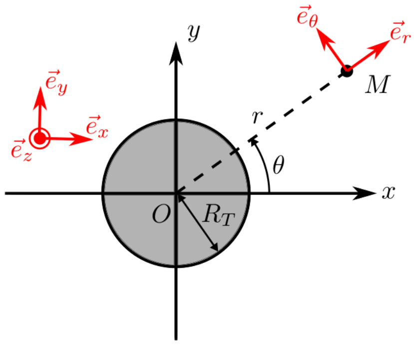


9. Déterminer la nouvelle puissance arrivant sur la voile solaire $\mathcal{P}(\theta)$, en fonction de θ, S et Φ. En déduire l'énergie δE reçue par la voile pendant dt. *On fera un schéma clair sur la copie pour illustrer le raisonnement !*
10. Montrer alors que la pression de radiation s'exprime sous la forme
$$P_r = P_0 \cos^2 \theta$$
et donner l'expression de P_0. Comment faut-il placer la voile solaire pour maximiser l'énergie reçue ?

Problème - Lancement d'un satellite de télédétection terrestre

L'objectif de ce problème est de modéliser divers aspects de la mise en orbite d'un satellite pour l'observation terrestre (GPS, météo, ...). Chaque partie traite d'une problématique différente : mise en orbite basse, transfert vers une orbite haute, stabilité sur cette orbite haute. Elles peuvent être traitées indépendamment, mais les résultats de la partie 1 sont utilisables dans les autres.

Dans tout le problème, on se place dans le référentiel géocentrique, que l'on supposera galiléen. Ce référentiel, de centre O est muni d'une base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, mais la plupart des vecteurs seront exprimés dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ liée au satellite M.



> **Données :** Quelques constantes importantes dans le problème.
>
> - Masse du satellite : $m = 4{,}0 \cdot 10^3$ kg.
> - Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 {\cdot} \mathrm{kg}^{-2}$.
> - Masse et rayon de la Terre : $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg , $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3$ km.

Partie 1 - Calculs préliminaires

1. On suppose dans ce problème que le référentiel géocentrique est galiléen. En réalité, il ne l'est pas : pourquoi ? A quelle condition peut-on faire cette hypothèse ?
2. Calculer le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ du satellite par rapport à O. Pourquoi est-il constant au cours du mouvement ?
3. Justifier que le mouvement est plan, et que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Quel est le nom habituellement donné à C?
4. On considère un objet de masse m_0 posé à la surface de la Terre. De plus, on note g_0 l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre. En écrivant la force subie par cet objet de deux manières différentes, justifier que
$$g_0 = \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2}$$
et calculer sa valeur numérique.
5. En déduire l'expression de la force gravitationnelle subie par le satellite en fonction de m, g_0, R_T et r, et démontrer qu'elle dérive de l'énergie potentielle
$$E_p(r) = -\frac{m g_0 R_T^2}{r}$$

à condition de choisir une condition aux limites ($E_p = 0$). Préciser cette condition aux limites.

6. Dans cette question, on propose de démontrer la première loi de Kepler, en utilisant une astuce. On définit le *vecteur de Runge-Lenz* du satellite $\vec{A}$ par la relation
$$\vec{A} = m\vec{v} \wedge \vec{L}_O - \mathcal{G}m^2M\vec{e}_r$$
   (a) Justifier que $\vec{A}$ est dans le plan du mouvement, puis montrer que $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0}$
   (b) Compte tenu de la question précédente, on choisit de définir l'axe (Ox) du repère de sorte que $\vec{A} = A\,\vec{e}_x$. Calculer $\vec{A} \cdot \overrightarrow{OS}$ en fonction de L_O, r, $\mathcal{G}$, m et M. *On rappelle la règle du produit mixte pour trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:*
$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$$
   (c) On définit θ comme l'angle entre $\vec{A}$ et $\overrightarrow{OS}$. Démontrer alors que, avec $r = OS$:
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$
   en définissant les deux constantes p et e. Quelles sont les trois trajectoires possibles, en fonction de la valeur de e ?

Partie 2 - Mise en orbite circulaire basse

Pour mettre le satellite en orbite terrestre, deux étapes sont nécessaires :

- *Etape 1 : phase balistique*. Le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse dont le centre de la Terre est un foyer, jusqu'à l'apogée de cette trajectoire.
- *Etape 2 : phase de satellisation*. Le satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

Dans cette partie, on suppose que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

7. Calculer les vecteurs vitesse et accélération du satellite pour cette trajectoire, en fonction uniquement de $v = r\dot{\theta}$, $\dot{v}$ et r.
8. Montrer que le mouvement est nécessairement uniforme, et exprimer v^2 en fonction de g_0, R_T et r.
9. En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m, g_0, R_T et r. Justifier le signe de E_m.
10. Calculer la valeur de l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ (orbite basse), et $r_h = 40 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ (orbite haute).

Partie 3 - Etude énergétique du satellite

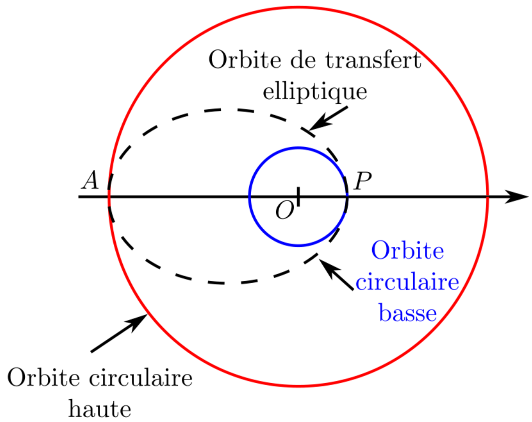
On suppose dans cette partie que la trajectoire de satellite n'est pas nécessairement circulaire.

11. Calculer l'énergie mécanique du satellite, et montrer qu'on peut l'écrire sous la forme
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\mathrm{eff}}(r)$$
    en précisant la fonction $E_{p,\mathrm{eff}}(r)$, appelée *énergie potentielle effective*.
12. Expliquer pourquoi les valeurs de r atteignables par le satellite au cours de son mouvement sont données par l'inégalité $E_{p,\mathrm{eff}}(r) \leq E_m$.
13. Tracer l'allure de $E_{p,\mathrm{eff}}(r)$ en fonction de r. En admettant que la trajectoire du satellite est une conique (c'est-à-dire un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole) :
    (a) donner l'intervalle dans lequel doit se trouver E_m pour que le mouvement soit hyperbolique.
    (b) donner l'intervalle dans lequel doit se trouver E_m pour que le mouvement soit elliptique.
    (c) donner la condition sur E_m pour que la trajectoire du satellite soit circulaire ou parabolique.

Partie 4 - Passage de l'orbite circulaire basse à l'orbite circulaire haute

Pour atteindre des orbites de très hautes altitudes :

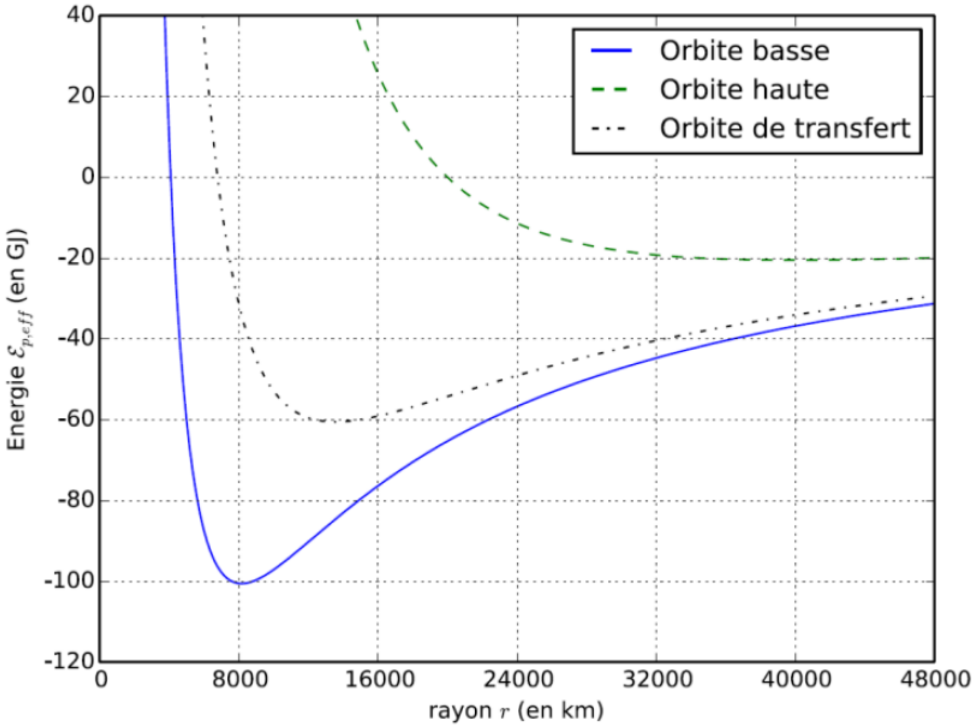
- On place d'abord le satellite en *orbite circulaire basse* (ici, de rayon $r_b = 8{,}0 \cdot 10^3$ km)
- A l'aide d'une variation brutale de vitesse, on passe le satellite sur une *ellipse de transfert*, dont l'un des foyers est la Terre O. Le satellite est initialement au périgée P de cette trajectoire elliptique.
- Lorsque le satellite arrive à l'apogée A de l'ellipse de transfert, une nouvelle variation brutale de vitesse le positionne sur une *orbite circulaire haute* (ici, de rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km).



L'objectif de cette partie est de calculer les variations d'énergie mécanique que doit subir le satellite pour passer sur l'orbite de transfert, puis se stabiliser sur l'orbite circulaire haute.

14. Que vaut $\dot{r}$ lorsque le satellite se situe en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Exprimer le demi grand-axe de l'ellipse a en fonction de r_h et r_b.
15. Montrer, à partir de la conservation de l'énergie mécanique, que r_h et r_b sont solution d'une équation du second degré de la forme
$$r^2 + \alpha r + \beta = 0$$
en précisant les expressions des constantes α et β en fonction de m, C, E_m, g_0 et R_T.
16. Déduire de la question précédente que
$$E_m = -\frac{g_0 m R_T^2}{2a}$$

La courbe ci-dessous représente les énergies potentielles effectives pour les 3 orbites.



17. Déterminer l'énergie mécanique $E_{m,t}$ du satellite sur l'ellipse de transfert par lecture graphique.
18. Déterminer les énergies mécaniques $E_{m,b}$ et $E_{m,h}$ du satellite sur les orbites circulaires basse et haute respectivement, par lecture graphique.
19. En déduire la variation d'énergie $\Delta E_{m,b \to t}$ que doit subir le satellite pour passer de l'orbite circulaire basse à l'ellipse de transfert.
20. Sachant que l'énergie récupérable à partir du carburant du satellite est $\mathscr{E} = 50\,\mathrm{MJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$, calculer la masse de carburant nécessaire pour effectuer cette manœuvre, et commenter en comparant à la masse du satellite.
21. Reproduire le schéma des trois orbites, et représenter, par une flèche, les forces de poussée que doit subir le satellite en A et en P au cours des manœuvres de mise en orbite. *Seuls la direction et le sens sont évalués, on ne tiendra pas compte de leur amplitude*

Partie 5 - Chute du satellite vers la Terre

A cause des chocs entre le satellite et les molécules de la haute atmosphère, son énergie mécanique diminue. Même si cet effet est relativement faible, la position du satellite peut changer de manière conséquente sur des temps longs. Dans cette partie, $r(t)$ n'est plus nécessairement constant, mais on supposera que les variations d'altitude sont suffisamment faibles pour que les relations suivantes restent valables :

$$E_m(t) = -\frac{mg_0R_T^2}{2r(t)} \quad ; \quad v(t)^2 = \frac{g_0R_T^2}{r(t)}$$

De plus, on modélisera les chocs ralentissant le satellite par une force de frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

22. Calculer la durée T nécessaire pour faire un tour de l'orbite circulaire de rayon r. Quel est le nom de l'équation obtenue ?
23. Montrer que $r(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau}r = 0$$

en précisant l'expression de τ et sa dimension.

24. En déduire $r(t)$, en notant $r(t=0) = r_0$, et tracer la courbe. α est-il constant en réalité ?
25. Estimer α (attention, la valeur est très petite et c'est normal : pourquoi ?) si le satellite descend d'environ $1\,\mathrm{m}$ à chaque tour d'orbite proche de r_0. En supposant α constant, de combien aura diminué le rayon de l'orbite circulaire en 10 ans de fonctionnement du satellite ?