Devoir Surveillé 6 - Corrigé

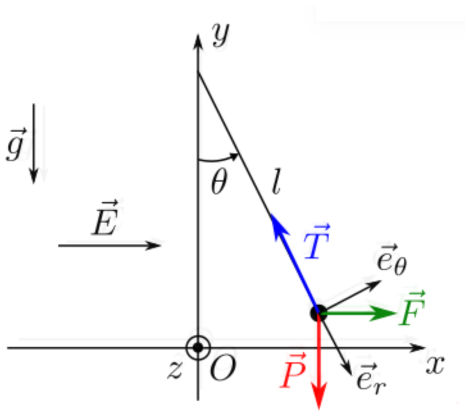
Question de cours

Voir...le cours !

Exercice - Pendule électriquement chargé

1. Voir le cours pour les détails, dans les grandes lignes, la tension du fil ne travaille pas et le poids dérive de $E_p = mgy = mgl(1-\cos\theta)$ (en choisissant la référence à $y=0$). D'autre part, le mouvement étant circulaire de rayon l, la vitesse a pour norme $v = l\dot{\theta}$, et donc l'énergie cinétique s'écrit
$$E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$
Le théorème de la puissance mécanique s'écrit alors
$$0 = \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}ml^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + mgl\frac{d}{dt}(1-\cos\theta)$$
D'où
$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$$
En simplifiant par $\dot{\theta}$, on obtient finalement
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

2. Voir schéma ci-dessous. Les forces s'appliquant sur le pendule sont
   - La force de tension $\vec{T} = -T\,\vec{e}_r$,
   - Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$,
   - La force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E} = qE\,\vec{e}_x = qE\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$



3. A l'équilibre, le principe d'inertie appliqué au pendule dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, donne
$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$
En projetant cette équation vectorielle dans la base polaire, on obtient
$$\begin{cases} 0 &= -T + mg\cos\theta_{\text{eq}} + qE\sin\theta_{\text{eq}} \\ 0 &= -mg\sin\theta_{\text{eq}} + qE\cos\theta_{\text{eq}} \end{cases}$$

La deuxième équation peut se réécrire

$$\frac{\sin\theta_{\text{eq}}}{\cos\theta_{\text{eq}}} = \tan\theta_{\text{eq}} = \frac{qE}{mg} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{eq}} = \arctan\left(\frac{qE}{mg}\right)}$$

Mesurer l'angle θ_{eq} permet donc de mesurer une des grandeurs mises en jeu dans cette formule, par exemple, la charge électrique q portée par le pendule si on connaît sa masse, et les valeurs de E et g (c'est un *électromètre*). On peut aussi imaginer mesurer E si on connaît la valeur de q, mais c'est moins évident.

4. Au maximum, $\boxed{\theta_{\text{eq}} = \pi/2}$, si $E > 0$. Cette valeur est atteinte lorsque $E \to \infty$, mathématiquement, ou plutôt si $qE/mg >> 1$, physiquement.
Si on change le sens de E, on change le signe de θ_{eq}. De même si on change le signe de q sans toucher à E. Enfin, si on change le signe de E et de q simultanément, on retrouve le même θ_{eq}.
5. Si le champ est vertical, alors la position d'équilibre du pendule est forcément verticale : $\theta_{\text{eq}} = 0$ ou $\theta_{\text{eq}} = \pi$. La valeur dépend de l'intensité relative de mg et de qE :

   - Si $qE < 0$ (donc soit $\vec{E}$ vers le bas et $q > 0$, soit $\vec{E}$ vers le haut et $q < 0$) : la force électrostatique est orientée suivant $-\vec{e}_y$, comme le poids. La seule position d'équilibre sera donc $\theta_{\text{eq}} = 0$.
   - Si $qE > 0$, la force électrostatique est orientée suivant $\vec{e}_y$, et donc opposée au poids. Il y a alors deux cas de figure supplémentaires :
     - si $mg > qE$: le poids "l'emporte", et la position d'équilibre sera $\theta_{\text{eq}} = 0$.
     - Si $mg < qE$: la force électrostatique "l'emporte", et la position d'équilibre sera $\theta_{\text{eq}} = \pi$.

     La force de tension ne joue pas de rôle dans la détermination de l'angle d'équilibre : dés que la force électrostatique dépasse le poids, la masse commence à s'élever, et le pendule n'est plus tendu : $T = 0$. Elle réapparaît lorsque la masse atteint sa position d'équilibre, et le principe d'inertie permet de déterminer sa norme : $T = qE - mg$.

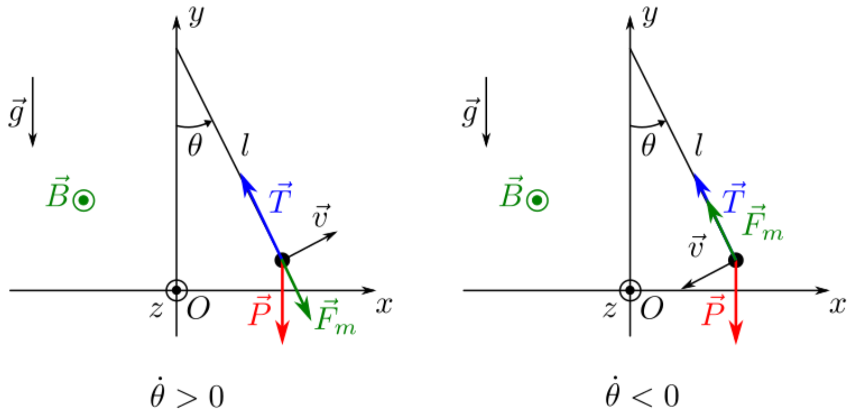
6. Cette fois-ci, le pendule est soumis à la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or, le mouvement étant circulaire, $\vec{v} = l\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, et donc

$$\boxed{\vec{F}_m = qlB\dot{\theta}\,\vec{e}_r}$$

La force magnétique est donc colinéaire à la force de tension, et son sens dépend du signe de $\dot{\theta}$ (si $q > 0$) : elle s'y ajoute si $\dot{\theta} < 0$, et s'y soustrait si $\dot{\theta} > 0$. Elle joue donc un rôle analogue à la force de tension, et ne modifie pas *a priori* le mouvement circulaire.



7. En appliquant le PFD sur le pendule, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, avec les forces $\vec{F}_m$, $\vec{P}$ et $\vec{T}$:
$$m\vec{a} = mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) + qLB\dot{\theta}\vec{e}_r - T\vec{e}_r$$
d'où, en projection avec $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = -l\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$:
$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} -ml\dot{\theta}^2 & = -T + mg\cos\theta + qlB\dot{\theta} \\ l\ddot{\theta} & = -g\sin\theta \end{array}\right.}$$
Ces équations sont non linéaires, ce qui rend impossible leur résolution.

8. On peut soit faire une étude énergétique, soit faire l'intégrale première du mouvement à partir de la deuxième équation. Faisons cette deuxième méthode : on multiplie par $\dot{\theta}$ de chaque côté pour faire apparaître des fonctions "intégrables" :
$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\dot{\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\tilde{t}=0}^{t} \ddot{\theta}\dot{\theta}\,d\tilde{t} = -\frac{g}{l}\int_{\tilde{t}=0}^{t} \dot{\theta}\sin\theta\,d\tilde{t}$$
et, en reconnaissant les dérivées de $\dot{\theta}^2/2$ et de $-\cos\theta$,
$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$
Ainsi,
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$
Le signe $+$ correspond au mouvement du pendule dans le sens trigonométrique (θ augmente), et le signe $-$ au mouvement du pendule dans le sens horaire (θ diminue), la racine étant positive.

9. On peut maintenant exploiter la projection du PFD sur le vecteur de base $\vec{e}_r$, en remplaçant $\dot{\theta}$ par son expression :
$$-ml\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) = -T + mg\cos\theta \pm qlB\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$
d'où, en réarrangeant les termes,
$$\boxed{T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0 \pm qlB\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

10. Il est donc possible que T s'annule, si $\dot{\theta} < 0$: cela correspond à la situation où le pendule se déplace dans le sens horaire. Physiquement, dans cette phase du mouvement, la force magnétique compense partiellement la composante selon $\vec{e}_r$ du poids, et la force de tension disparaît dés lors que la force magnétique domine. Cette équation n'est d'ailleurs plus valable dés qu'on devrait avoir $T < 0$, car la tension n'existe tout simplement plus !

11. On garde seulement l'expression avec le signe $-$, pour laquelle il est possible que T s'annule :
$$T = 3mg\cos\theta + 2mg\cos\theta_0 - qlB\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$
Il n'y a pas de difficulté de principe pour calculer la dérivée, il faut juste prendre son temps et vérifier régulièrement s'il n'y a pas une erreur de calcul. Attention aussi à ne pas faire apparaître des $\dot{\theta}$, car on dérive par rapport à θ, pas par rapport à t !
$$\frac{dT}{d\theta} = -3mg\sin\theta - qlB\sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot \frac{-\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Soit ψ la valeur de θ telle que $\dfrac{dT}{d\theta} = 0$. On a alors

$$3mg\sin\psi = qlB\sqrt{\frac{2g}{l}}\cdot\frac{-\sin\psi}{2\sqrt{\cos\psi-\cos\theta_0}}$$

On peut simplifier par $\sin\psi$, car la tension est maximale lorsque le pendule est vertical (si T s'y annulait, alors elle n'existerait jamais !). Ainsi, en prenant le carré (je ne simplifie volontairement pas tout de suite les termes pour que vous "voyiez" les étapes),

$$9m^2g^2 = q^2l^2B^2\frac{2g}{4l(\cos\psi-\cos\theta_0)} \quad\Longrightarrow\quad \cos\psi-\cos\theta_0 = \frac{2q^2l^2B^2g}{4l}\cdot\frac{1}{9m^2g^2}$$

et donc en simplifiant,

$$\boxed{\cos\psi = \cos\theta_0 + \frac{q^2B^2l}{18gm^2}}$$

12. Il suffit alors de remplacer $\cos\psi$ dans l'expression de T :

$$\begin{aligned} T &= 3mg\cos\theta_0 + 3mg\frac{q^2B^2l}{18gm^2} - 2mg\cos\theta_0 - qlB\sqrt{\frac{2g}{l}\frac{q^2B^2l}{18gm^2}} \\ &= mg\cos\theta_0 + \frac{q^2B^2l}{6m} - qlB\sqrt{\frac{q^2B^2}{9m^2}} \\ &= mg\cos\theta_0 + \frac{q^2B^2l}{6m} - \frac{q^2B^2l}{3m} \\ &= mg\cos\theta_0 - \frac{q^2B^2l}{6m} \end{aligned}$$

Pour que T s'annule, il faut donc que (avec $B_c > 0$)

$$\frac{q^2B_c^2l}{6m} = mg\cos\theta_0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{B_c = \frac{m}{q}\sqrt{\frac{6g\cos\theta_0}{l}}}$$

Remarque : Si on pose $\omega_c = qB/m$ la pulsation cyclotron et $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ la pulsation propre du pendule, la relation se réécrit

$$\omega_c = \omega_0\sqrt{6\cos\theta_0}$$

ce qui permet de voir qu'elle est bien homogène.

13. L'application numérique donne

$$\boxed{B_c = 5{,}4\,\mathrm{T}}$$

ce qui est cohérent avec les graphiques : seul celui pour lequel $B = 6\,\mathrm{T} > B_c$ présente des valeurs de θ pour lesquelles $T < 0$ (et donc des valeurs pour lesquelles T s'annule). Dés que $T = 0$, le pendule n'est plus tendu et le mouvement de la masse n'est plus décrit par les équations de cet exercice. En revanche, pour $B < B_c$, $T \neq 0$ pour tout θ, le pendule reste tendu. Néanmoins, on voit que T présente parfois des minimum locaux, si B est suffisant. Ces minimum se rapprochent de $\pm\pi/2$ à mesure que B diminue. Enfin, on voit sur tous les graphiques que la tension est maximale en $T = 0$, ce qui correspond à l'intuition. Néanmoins, la valeur maximale de la force de tension dépend aussi de celle de B : plus B est intense, et plus la force magnétique compensera fortement le poids, diminuant la valeur de la force de tension. *Je laisse le script Python qui m'a permis de tracer les courbes sur le site web, n'hésitez pas à "jouer" un peu avec les valeurs !*

Problème - De la physique aux sports d'hiver

Partie 1 - La remontée mécanique

1.1. On connaît le dénivelé de la piste, un peu de trigonométrie élémentaire donne

$$\tan\alpha = \frac{10\,\mathrm{m}}{200\,\mathrm{m}} = 0,05 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\alpha = 0{,}05\,\mathrm{rad} = 2{,}8°}$$

1.2. La force de tension est orientée selon la barre et vers le haut, donc $\boxed{\mathcal{P}_c = \vec{T}\cdot\vec{v} = Tv\cos\beta}$ vu la définition de l'angle β.

1.3.
- *Système* : skieur
- *Référentiel* : terrestre, supposé galiléen
- *Bilan des forces et puissances*
  - Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$, donc

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot v\vec{e}_x = -mgv\sin\alpha$$

  - Force de tension : $\vec{T}$, et sa puissance a déjà été calculée :

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = Tv\cos\beta$$

  - Réaction du support : $\vec{R} = R_n\,\vec{e}_y - R_T\,\vec{e}_x$. Seule la composante tangentielle travaille :

$$\mathcal{P}(\vec{R}) = \mathcal{P}(\vec{R}_T) = -R_T v$$

1.4. La seconde loi de Newton s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{R}$$

or, $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}}$, donc

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$$

En projetant sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient

$$\begin{cases} 0 &= -mg\sin\alpha + T\cos\beta - R_T \\ 0 &= -mg\cos\alpha + T\sin\beta + R_N \end{cases}$$

ainsi,

$$R_N = mg\cos\alpha - T\sin\beta$$

De plus, on est en situation de glissement, donc on peut appliquer la seconde loi de Coulomb :

$$R_T = \mu R_N \quad\longrightarrow\quad R_T = \mu mg\cos\alpha - T\mu\sin\beta$$

Enfin, il faut éliminer T. Pour cela, on veut faire apparaître $\mathcal{P}_c$ qui est une donnée du problème : on exploite donc

$$\mathcal{P}_c = Tv\cos\beta \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{\mathcal{P}_c}{v\cos\beta}$$

En remplaçant,

$$\boxed{R_T = \mu mg\cos\alpha - \frac{\mu\mathcal{P}_c\tan\beta}{v}}$$

1.5. En en déduit la puissance de $\vec{R}_T$, maintenant qu'on connaît son expression (attention aux signes !) :

$$\mathcal{P}(\vec{R}_T) = \vec{R}_T\cdot\vec{v} = -vR_T \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\mathcal{P}(\vec{R}_T) = -\mu vmg\cos\beta + \mu\mathcal{P}_c\tan\beta}$$

1.6. On écrit le théorème de la puissance cinétique appliqué au skieur :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F_i})$$

Or, $v = $ cste, donc E_c aussi, et $\frac{dE_c}{dt} = 0$. On en tire :

$$-mgv\sin\alpha - \mu vmg\cos\alpha + \mu\mathcal{P}_c\tan\beta + \mathcal{P}_c = 0$$

En faisant un peu de réarrangement, on aboutit à

$$\boxed{\mathcal{P}_c = \frac{mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{1 + \mu\tan\beta}}$$

1.7. Il y a un usager tous les $5\,\mathrm{m}$, et $200\,\mathrm{m}$ de pente, donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{moteur}} = 40\mathcal{P}_c = 1{,}9\cdot 10^4\,\mathrm{W} = 19\,\mathrm{kW}}$$

C'est finalement une puissance assez raisonnable : une voiture de 100 chevaux consomme une puissance (thermique, certes) de $75\,\mathrm{kW}$ pour fournir $7{,}5\,\mathrm{kW}$ (rendement de $0,1$), il suffirait donc de trois moteurs de voiture. En comparaison, un télésiège est capable de fournir une puissance de l'ordre de $300\,\mathrm{kW}$!

Partie 2 - Cinématique du Super G

2.1. $\boxed{[a] = L\ ;\ [b] = L^{-1}}$. $y(0) = a = d$, donc $\boxed{a = d}$.
Enfin, si $x = 2L$, alors $y(2L) = y(0) = d$, donc en exploitant la périodicité du cosinus,

$$2bL = 2\pi \quad\Longrightarrow\quad \boxed{b = \frac{\pi}{L}}$$

2.2. L'énoncé donne $\dot{x} = v_0 = $ cste, donc une simple intégration avec $x(0) = 0$ donne

$$\boxed{x(t) = v_0 t}$$

Puis, en remplaçant dans y,

$$\boxed{y(t) = d\cos\left(\frac{\pi v_0}{L}t\right)}$$

2.3. On peut déterminer, par dérivation successive, les vecteurs vitesse et accélération :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y = v_0\,\vec{e}_x - \frac{\pi v_0 d}{L}\sin\left(\frac{\pi v_0}{L}t\right)\vec{e}_y}$$

et

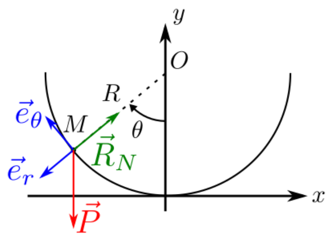
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\left(\frac{\pi v_0}{L}\right)^2 d\cos\left(\frac{\pi v_0}{L}t\right)\vec{e}_y}$$

2.4. On veut que $\|\vec{a}\| < 0,7g$ pour tout t. La "pire situation correspond à $|\cos(\ldots)| = 1$, donc

$$d\left(\frac{\pi v_0}{L_{\text{min}}}\right)^2 = 0,7g \quad\Longrightarrow\quad \boxed{L_{\text{min}} = \pi v_0\sqrt{\frac{d}{0,7g}} = 23\,\mathrm{m}}$$

Si $L < L_{\text{min}}$, il faut changer trop brusquement de direction, ce qui risque de faire partir le skieur dans le décor.

Partie 3 - Le half-pipe à snowboard

3.1. 

3.2.
- **Système :** M
- **Référentiel :** terrestre, supposé galiléen
- **Bilan des forces :**
  - Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$
  - Réaction normale $\vec{R}_N = -R_N\,\vec{e}_r$

La seconde loi de Newton s'écrit alors :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$$

d'où, avec l'expression de l'accélération en cylindriques,

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) & = -R_N + mg\cos\theta \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) & = -mg\sin\theta \end{cases}$$

Enfin, on peut simplifier les équations en utilisant le fait que le mouvement est circulaire : $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, donc

$$\boxed{\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 & = -R_N + mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} & = -mg\sin\theta \end{cases}}$$

3.3. A partir de la deuxième équation,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

On utilise l'astuce de l'intégrale première : on multiplie de chaque côté par $\dot{\theta}$, et on intègre.

$$\int_0^t \dot{\theta}\ddot{\theta}d\tilde{t} = \int_0^t -\frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta\,d\tilde{t} \Longrightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t=0) = \frac{g}{R}(\cos\theta - \cos\theta(t=0))$$

Avec les conditions initiales, $\cos(\theta(0)) = \cos(\pi/2) = 0$, et $\dot{\theta(0)} = 0$, donc

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}\cos\theta}}$$

si on suppose que θ augmente (signe $-$ dans l'autre sens).

3.4. $\vec{R}_N$ ne travaille pas, et le poids dérive de $E_p = mgh$ avec h la hauteur à laquelle M se trouve de l'altitude de référence. Si on choisit $y = 0$ comme altitude de référence, un peu de trigo donne $h = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$, et donc $E_p = mgR(1-\cos\theta)$. Toutes les forces étant conservatives, le théorème de l'énergie mécanique s'écrit

$$\Delta E_m = 0 \quad \Longrightarrow \forall t\ E_m(t) = E_m(t=0)$$

D'autre part, l'énergie mécanique s'écrit, avec $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

Donc, à t quelconque,

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2(t=0) + mgR(1-\cos\theta(0)) = mgR(1-\cos\theta(t=0))$$

En remplaçant les valeurs initiales de $\dot{\theta}$ et θ, on obtient bien le même résultat qu'en 3.3.

3.5. On remplace $\dot{\theta}^2$ dans la première équation du PFD :

$$-mR\cdot\frac{2g}{R}\cos\theta = -R_N + mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \boxed{R_N = 3mg\cos\theta}$$

R_N est maximale lorsque $\theta = 0$ (car $\cos 0 = 1$), et sa norme vaut $3mg$: le sportif "ressent" trois fois son propre poids !

3.6. La vitesse maximale sera atteinte lorsque le sportif est "au fond" du half-pipe, à une altitude $z = 0$. L'altitude maximale étant $R+h$, et l'énergie mécanique étant conservée,

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + 0 = 0 + mg(R+h) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v_m = \sqrt{2mg(R+h)} = 12{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

3.7. C'est un peu grossier pour plusieurs raisons : dés le premier demi-tour, l'amplitude des oscillations est inférieure à $\pi/2$. De plus, tous les calculs faits précédemment sont valables en l'absence de frottements !

3.8. L'énoncé est un peu "direct" sur les signes...il aurait fallu écrire une valeur absolue ! $\vec{R}_T = R_T\,\vec{e}_\theta$ avec R_T de signe variable suivant le sens d'évolution du sportif. Le travail élémentaire vaut alors, avec $\overrightarrow{dl} = \pm R\,d\theta\,\vec{e}_\theta$ suivant le sens d'évolution du sportif :

$$\delta W = \vec{R}_T\cdot\overrightarrow{dl} = \pm R_T R\,d\theta = \pm 3\mu_d mg\cos\theta R\,d\theta$$

où le signe $\pm$ est choisi pour que, quoi qu'il arrive, le travail de $\vec{R}_T$ soit résistant (on peut avoir $d\theta > 0$ ou $d\theta < 0$). Sur un tour de half-pipe, on doit intégrer entre $\theta = -\pi/2$ et $\pi/2$:

$$|W| = \left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\mu_d mgR\cos\theta\,d\theta\right| = 3\mu_d mg\,|(\sin(\pi/2)-\sin(-\pi/2))| \quad\Longrightarrow\quad \boxed{|W| = 6\mu_d mgR}$$

(le travail est toujours négatif, en fait). L'énergie initiale du sportif étant

$$E_m(0) = E_p(\theta_0) = mgR$$

et chaque tour de piste enlevant W à l'énergie mécanique, au tour de rang n,

$$E_m(n) = E_m(0) - n\,|W|$$

On cherche alors N tel que $E_m(N) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{N = \frac{mgR}{6\mu_d mgR} = \frac{1}{6\mu_d} = 4,16}$$

Le sportif pourra faire un peu plus de quatre tours de piste avant de s'arrêter, dans ces conditions. On remarque que N ne dépend que de μ_d (ce qui peut être dû à la modélisation très simpliste).

Partie 4 - Etude d'une avalanche

4.1. Voir chapitre M_2 pour le bloc sur le plan incliné : $\boxed{\alpha_c = \arctan \mu_s}$.

4.2. α_c(neige fraîche) $= 79° \to 84°$, α_c(gobelets)α_c(grains ronds) $= 50°$: ce sont pour ces derniers types de neiges que les avalanches risquent de se produire. Les pentes pour lesquelles la neige fraîche produit des avalanches sont de toute façon impraticables.

4.3. On passe en dynamique : comme $\mu_d <_m u_s$, on commence à glisser et la pente est insuffisante pour freiner le bloc. L'avalanche est causée par la mise en mouvement "en cascade" de blocs de neige. Si on applique le PFD sur le bloc dans le référentiel terrestre, supposé galiléen,

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

En projetant sur $\vec{e}_x$,

$$m\frac{dv}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{e}_x + \vec{R}_T \cdot \vec{e}_x = mg \sin \alpha_c - R_T$$

avec $\vec{R}_N \perp \vec{e}_x$. De plus, par la loi de Coulomb du glissement, $R_T = \mu_d R_N$, et sur $\vec{e}_y$,

$$R_N - mg \cos \alpha_c = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_N = mg \cos \alpha_c$$

Ainsi,

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin \alpha_c - \mu_d \cos \alpha_c)$$

Comme le second membre de cette équation est constant, on obtient par intégration

$$\boxed{v(t) = v_0 + gt(\sin \alpha_c - \mu_d \cos \alpha_c)}$$

4.4. Par définition de l'énergie cinétique,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}\left[v_0 + gt \cos \alpha_c \left(\tan \alpha_c - \mu_d\right)\right]^2$$

où on a fait apparaître $\tan \alpha_c = \mu_s$ par la question 4.1. Ainsi,

$$\boxed{E_c(t) = \frac{m}{2}\left[v_0 + gt \cos \alpha_c \left(\mu_s - \mu_d\right)\right]^2}$$

4.5. E_c est plus importante si $\mu_s - \mu_d$ est plus élevée, donc si μ_d est faible, vu que les deux types de neige à avalanche ont le même μ_s. Si le bloc a davantage d'énergie cinétique, il pourra plus facilement mettre en mouvement le reste de la masse de neige. Ainsi, les avalanches à grains ronds sont les plus violentes.

4.6. Il faut que $v(t) = v(t_1) + g(t - t_1)(\sin \beta - \mu_d \cos \beta)$ diminue, donc que

$$\sin \beta - \mu_d \cos \beta < 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\beta < \arctan(\mu_d)}$$

ce qui est une condition similaire à celle du début du glissement, en remplaçant μ_s par μ_d. On remarque donc que, si l'angle de la pente ne diminue pas, le bloc ne s'arrêtera pas de glisser, car $\mu_d < \mu_s$!

4.7. On cherche t_2 tel que $v(t_2) = 0$. En posant $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\boxed{\Delta t = \frac{v(t_1)}{g(\mu_d \cos \beta - \sin \beta)}}$$

C'est le temps de freinage de l'avalanche.

4.8. Δt(gobelets) $= 7{,}2\,\mathrm{s}$, Δt(grains ronds) $= 67\,\mathrm{s}$: on voit que la neige à grains ronds est beaucoup plus dangereuse ! L'avalanche peut parcourir plusieurs kilomètres avant de s'arrêter.

Partie 5 - Chute d'un alpiniste

5.1. $m = P_{\text{max}}/g = 1836\,\text{kg}$: la corde ne risque pas de se rompre, même en cas de chute brutale de l'alpiniste. Pour éviter que ce dernier subisse un choc violent (et potentiellement mortel...), il faut que la corde soit élastique pour "allonger" la durée du choc et réduire la force subie.

5.2. $[\varepsilon] = \left[\dfrac{1}{kL}\right] = \dfrac{1}{[F]} = (MLT^{-2})^{-1} = M^{-1}L^{-1}T^2$. ε se mesure donc en N^{-1}.

5.3. (a) Une approche énergétique est adaptée : il n'y a qu'un seul degré de liberté (l'altitude x), et on recherche une valeur limité (donc théorème de l'énergie mécanique plutôt que puissance mécanique).

(b) On effectue le bilan des forces s'exerçant sur l'alpiniste, que l'on peut modéliser comme un système masse-ressort vertical.

- Poids : $\vec{P}$, dérivant de $E_{p,p} = mgx$ si l'axe x est descendant.
- Force de rappel du ressort, dérivant de $E_{p,\text{el}} = \dfrac{1}{2}kx^2$. Cela impose de choisir $x = 0$ comme la position pour laquelle le ressort a sa longueur à l'équilibre L.

Le théorème de l'énergie mécanique, dans le référentiel terrestre, appliqué entre $t = 0$ et l'élongation maximale s'écrit alors, en l'absence de forces non conservatives :

$$\Delta E_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_m(x = 0) = E_m(x_{\text{max}})$$

La vitesse en $x = x_{\text{max}}$ étant nulle, on peut calculer les énergies mécaniques :

- $E_m(x_{\text{max}}) = \frac{1}{2}mv(x_{\text{max}})^2 - mgx_{\text{max}} + \dfrac{1}{2}kx_{\text{max}}^2 = -mgx_{\text{max}} + \dfrac{1}{2}mx_{\text{max}}^2$
- $E_m(x = 0) = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ car la corde n'est pas tendue et on se situe à la référence des énergies potentielles de pesanteur.

Ainsi,

$$kx_{\text{max}}^2 - 2mgx_{\text{max}} - mv_0^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation polynômiale du second degré, dont les deux solutions sont

$$x_{\text{max},\pm} = \frac{1}{2k}\left(2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 4kmv_0^2}\right) = \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}\right)$$

La seule solution ayant un sens physique étant, la solution positive,

$$\boxed{x_{\text{max}} = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}\right)}$$

Enfin,

$$\boxed{F_{\text{max}} = kx_{\text{max}} = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}\right)}$$

5.4. Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h : cela correspond à $mgh = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ par théorème de l'énergie cinétique, donc

$$\boxed{v_0^2 = 2gh}$$

En remplaçant,

$$F_{\text{max}} = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}\frac{2gh}{g^2}}\right) = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)$$

Or, $k = \dfrac{1}{\varepsilon L}$, donc

$$F_{\text{max}} = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{k}{m}\frac{2gh}{g^2}}\right) = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{mg\varepsilon L}}\right)$$

Enfin, en termes du facteur de chute $f = \dfrac{h}{L}$,

$$\boxed{F_{\text{max}} = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2f}{\varepsilon mg}}\right)}$$

5.5. Si h et L doublent simultanément, f reste constante. Ainsi, F_{max} reste inchangée, et la chute a la même dangerosité.
Le pire des cas correspond à une chute la plus longue possible, à L fixé. Comme l'altitude maximale que peut avoir l'alpiniste par rapport au point d'accroche de la corde est L, et l'altitude minimale est $-L$, la hauteur maximale de chute est $h = 2L$. Ainsi, la chute la plus grave correspond à $\boxed{f = 2}$.

5.6. (a) On inverse la relation :

$$\left(\frac{F_{\text{max}}}{mg}-1\right)^2 = 1+\frac{2f}{\varepsilon mg} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{2f}{\frac{(F_{\text{max}}-mg)^2}{mg}-mg}$$

Donc, en multipliant en haut et en bas par mg,

$$\boxed{\varepsilon = \frac{2fmg}{F_{\text{max}}(F_{\text{max}}-2mg)} = 4{,}2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}^{-1}}$$

(b) On en déduit

$$x_{\text{max}} = \frac{F_{\text{max}}}{k} = \varepsilon L F_{\text{max}} = \varepsilon L mg\left(1+\sqrt{1+\frac{k}{m}\left(\frac{2f}{\varepsilon mg}\right)^2}\right)$$

Ici, $f = \dfrac{2h}{L} = 1$, car la corde doit être tendue à la fin, l'application numérique donne alors

$$\boxed{x_{\text{max}} = 2{,}9\,\mathrm{m} \quad ; \quad F_{\text{max}} = 6{,}9\,\mathrm{kN}}$$

5.7. (a) On commence par calculer la hauteur totale de chute : $5\ \mathrm{m}$ jusqu'à l'anneau, puis $1\ \mathrm{m}$ pour tendre la corde, donc $h = 6\,\mathrm{m}$. Cela correspond à un facteur de chute $f = 6$ (très élevé, c'est mal parti...). On calcule alors la force maximale avec la formule de la question 5.4. :

$$\boxed{F_{\text{max}} = 48\,\mathrm{kN}}$$

Le grimpeur ne survivra donc pas à la chute (et la corde va même se rompre au moment de l'impact !).

(b) On peut ajouter un amortisseur (type ressort) pour augmenter l'élasticité du système d'accroche, et donc diminuer F_{max}. Sur un parcours bien balisé, la sécurité se planifie cependant dés la construction du parcours : les concepteurs doivent anticiper en plaçant les lignes de vie et les points d'accroche de sorte que les chutes ne soient jamais dangereuses pour les usagers. Il faut également utiliser des longueurs de corde adaptées à la position des points d'accroche et des lignes de vie. *Vous penserez à cet exercice la prochaine fois que vous irez faire de l'acrobranche !*