

## Devoir Surveillé 6

L'épreuve dure 4 heures. Le sujet est constitué de 9 pages, et comporte une question de cours, un exercice et un problème. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Résoudre les exercices de ce sujet sur **copies doubles**. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements comptent pour une part importante de l'évaluation de la copie, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

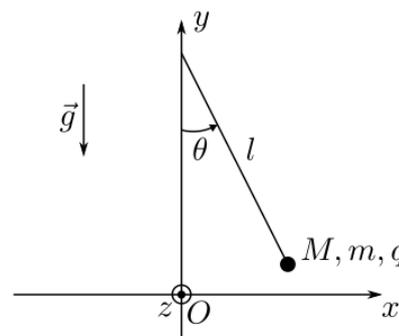
### Question de cours (maximum 20 minutes !)

1. Soit  $\vec{F} = F \vec{e}_x$  une force conservative. Définir ce terme, puis donner la relation mathématique entre  $\vec{F}$  et l'énergie potentielle associée  $E_p(x)$  (avec un seul degré de liberté). Quel est le lien entre le travail  $W_{AB}(\vec{F})$  de la force sur un chemin  $AB$  et  $E_p$  ?
2. On considère une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  se déplaçant dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ , avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ . Etablir les équations différentielles dont les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  de la particule sont solution. Puis déterminer, par la méthode de votre choix, les expressions mathématiques de  $v_x = \dot{x}$  et  $v_y = \dot{y}$ .
3. Déterminer, **sans calculs compliqués** (c'est-à-dire sans résoudre toutes les équations du mouvement), l'expression du rayon  $R$  de la trajectoire de la particule de la question précédente.

### Exercice - Pendule électriquement chargé

On considère un pendule simple, constitué d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , relié à un point fixe  $O$  par un fil idéal. On charge électriquement ce pendule par triboélectricité (en le frottant avec un autre matériau), et on note  $q$  cette charge. En l'absence d'indication contraire, on supposera que  $q > 0$  pour fixer les idées. Pour éviter que le pendule ne se décharge, on suppose également que le fil est un isolant électrique.

Le but de l'exercice est d'étudier le mouvement du pendule lorsqu'il est soumis à un champ électrostatique ou à un champ magnétique.



1. Dans un premier temps, on éloigne le pendule de toute source de champ électrique ou magnétique. Déterminer, **avec une méthode énergétique**, l'équation différentielle dont l'angle  $\theta$  est solution.

### Pendule chargé en présence d'un champ électrostatique

On soumet le pendule à un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E \vec{e}_x$ , avec  $E > 0$ .

2. Faire un schéma, puis un bilan des forces s'exerçant sur le pendule. On les exprimera dans la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , et on représentera les forces, ainsi que cette base, sur le schéma.
3. Déterminer l'angle  $\theta_{\text{eq}}$  correspondant à la position d'équilibre du pendule, en fonction notamment de  $E$  et  $g$ . A quoi pourrait servir ce dispositif ?
4. Quelle est la valeur maximale que peut prendre  $\theta_{\text{eq}}$ , et à quelle valeur du champ  $E$  cela correspond-il ? Que devient  $\theta_{\text{eq}}$  si la charge est de signe opposée ? Si le champ est selon  $-\vec{e}_x$  ?
5. On suppose désormais que le champ électrostatique, toujours uniforme, est vertical :  $\vec{E} = E \vec{e}_y$ . En raisonnant de manière qualitative, donner l'angle d'équilibre du pendule, suivant la valeur de  $E$ , son signe, et le signe de  $q$ .

## Pendule chargé en présence d'un champ magnétique

On supprime désormais la source de champ électrostatique, et on soumet à la place le pendule à un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ . On suppose que  $B > 0$ , et toujours que  $q > 0$ .

6. Exprimer la force de Lorentz magnétique  $\vec{F}_m$  s'exerçant sur le pendule en fonction notamment de  $\dot{\theta}$ . La représenter sur deux schémas différents : le premier si  $\dot{\theta} > 0$  (le pendule "tourne" dans le sens trigonométrique), et le deuxième si  $\dot{\theta} < 0$ . Quel est l'effet qualitatif de cette force sur le pendule ?
7. Ecrire les équations du mouvement du pendule en présence du champ magnétostatique, en projection sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ . Pourquoi ne peut-on pas résoudre "simplement" ces équations ?
8. On note  $\theta_0$  l'angle initial du pendule, et on suppose que sa vitesse initiale est nulle :  $\dot{\theta}(0) = 0$ . Démontrer que

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

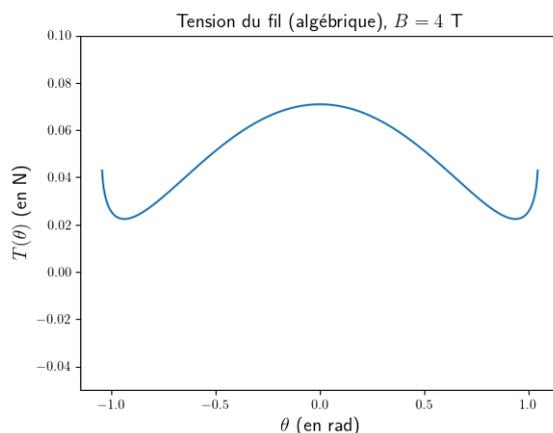
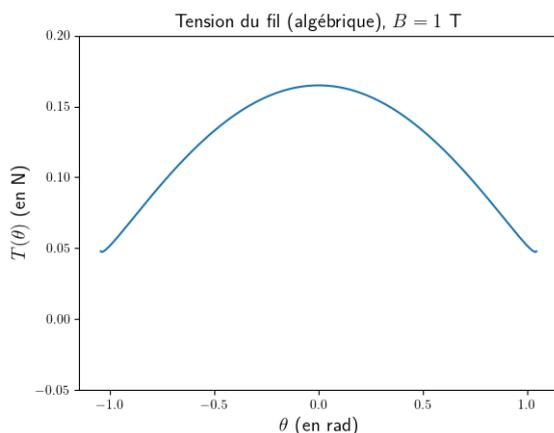
A quelles phases du mouvement correspondent les signes + et - ?

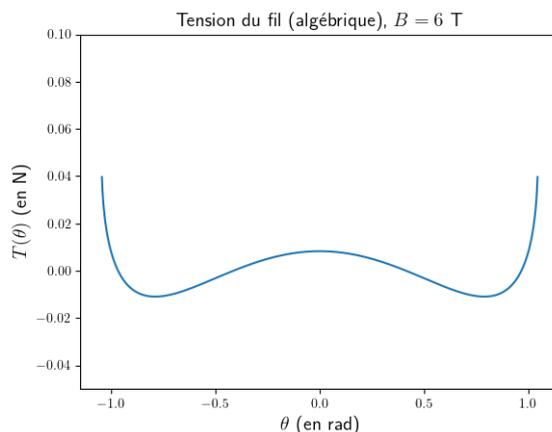
9. Dédurre, de ce qui précède, l'expression de la norme de la force de tension  $T = \|\vec{T}\|$  en fonction de  $\theta$ ,  $\theta_0$  et des constantes du problème, dans les deux situations  $\dot{\theta} > 0$  et  $\dot{\theta} < 0$ .
10. Est-il possible que la force de tension s'annule, à cause de l'effet du champ magnétique ? A quelle partie du mouvement du pendule (rotation sens trigo/sens horaire) cela correspond-t-il ?
11. **Attention, les deux questions qui suivent sont un peu calculatoires ! Ne bloquez pas dessus trop longtemps...** On se place dans le cas où  $T$  peut potentiellement s'annuler. Calculer  $\frac{dT}{d\theta}$ , et en déduire que  $T$  est extrémale pour les angles  $\theta = \psi$  vérifiant

$$\cos \psi = \cos \theta_0 + \frac{q^2 B^2 l}{18gm^2}$$

Comment pourrait-on vérifier si ce sont des maximum ou des minimum de  $T$  ? (*je ne vous impose pas de faire ce calcul...*)

12. En déduire la valeur de  $T(\theta = \psi)$ , et déterminer la valeur critique  $B_c$  du champ magnétique telle que  $T(\psi) = 0$ , en fonction de  $q$ ,  $m$ ,  $l$  et  $\theta_0$ .
13. *Application numérique.* Le pendule est tel que  $l = 1,0$  m,  $m = 10$  g,  $C = 1,0 \cdot 10^{-2}$  C, et  $\theta_0 = \pi/3$ . On donne également  $g = 9,81$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ . Les trois courbes ci-dessous représentent la fonction  $T = f(\theta)$  (en tenant compte du signe, même si  $T < 0$  n'a pas de sens physique) pour des valeurs de  $B$  différentes, dans la phase du mouvement où  $\dot{\theta} < 0$ . Commenter ces courbes avec les résultats des deux questions précédentes.





## Problème - De la physique aux sports d'hiver

L'objectif de ce problème est de modéliser physiquement plusieurs situations que l'on peut rencontrer aux sports d'hiver (bien que vous n'avez probablement pas eu le temps d'y aller cette année, vous pouvez admirer le sens du timing de votre professeur !). Chaque partie du problème est indépendante des autres. Tout se passe sur la planète Terre (et à latitude proche de celle de Paris) donc  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Données : Lois de Coulomb.** On rappelle les deux lois de Coulomb décrivant les composantes normale  $\vec{R}_N$  et tangentielle  $\vec{R}_T$  de la réaction du support.

- Première loi : si le solide est immobile, alors :

$$\|\vec{R}_T\| < \mu_s \|\vec{R}_N\|$$

$\mu_s$  est le *coefficient de frottement statique*. Il est sans dimension.

- Deuxième loi : si le solide est en mouvement à une vitesse  $\vec{v}$  **par rapport à la surface de glissement**, alors :

$$\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$$

avec  $\mu_d$  le *coefficient de frottement dynamique*. En général,  $\mu_d < \mu_s$ , et les deux valeurs sont assez proches.

- Dans le cas où on néglige les frottements solides,  $\vec{R}_T = \vec{0}$ , mais  $\vec{R}_N$  n'est jamais nul s'il y a contact.

**IMPORTANT : Choix entre la partie 4 et la partie 5.** Je vous propose d'essayer de "différencier" ce problème en fonction de votre niveau et de vos ambitions

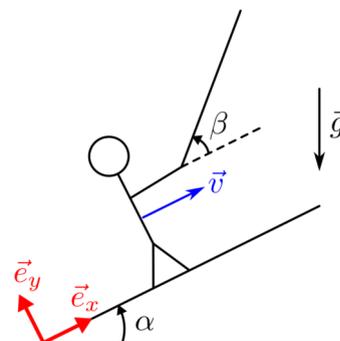
- Les parties 1, 2 et 3 sont **obligatoires**.
- Parmi les parties 4 et 5, traiter **uniquement celle de votre choix**. La partie 4 est classique (piste bleue), et la partie 5 un peu plus originale (piste rouge, pour ceux qui envisagent la PC\*). **Les deux parties rapportent le même nombre de points.**

Bien entendu, les plus rapides/courageux pourront traiter les deux. Mais vous savez que mes sujets sont toujours trop longs...)



### Partie 1 - La remontée mécanique

La remontée mécanique (ou remonte-pente) est un dispositif constitué d'un câble auquel sont accrochées des barres métalliques. Le skieur s'accroche à la barre métallique, et un moteur entraîne le câble, ce qui permet de remonter la pente. On suppose que le skieur est immobile par rapport à la barre métallique, et que le câble le tire à une vitesse  $\vec{v}$ . On note  $\alpha$  l'angle entre la pente et l'horizontale, et  $\beta$  l'angle entre la barre et la pente. Enfin, on munit la pente d'une base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , le mouvement étant plan.



**Données :** Le câble a une longueur totale de 200 m, et l'arrivée est située 10 m plus haut que le départ (c'est une piste verte !). On suppose que les skieurs tiennent tous la barre avec un angle  $\beta = \pi/4$ , et que leur masse est  $m = 70$  kg. Sur la remontée, chaque skieur est à 5 m de son voisin de devant, et leur vitesse est  $v = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On note  $\mu = \mu_d = 0,10$  le coefficient de frottement dynamique entre les skis et la piste.

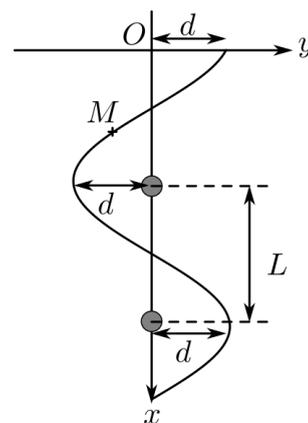
- 1.1 Calculer la valeur de l'angle  $\alpha$  à l'aide des données.
- 1.2 On note  $\vec{T}$  la force de tension que la barre exerce sur le skieur. Exprimer la puissance  $\mathcal{P}_c$  fournie au skieur par le câble en fonction de  $T = \|\vec{T}\|$ ,  $v$  et  $\beta$ .
- 1.3 Dans le référentiel terrestre, que l'on supposera galiléen, faire un bilan des forces exercées sur le skieur, et exprimer, lorsque c'est possible, leurs puissances en fonction des données du problème.
- 1.4 Ecrire la seconde loi de Newton appliquée au skieur, et en déduire que  $R_T$  a pour expression :

$$R_T = \mu mg \cos \alpha - \frac{\mu \mathcal{P}_c \tan \beta}{v}$$

- 1.5 En déduire la puissance de  $\vec{R}_T$ .
- 1.6 Exprimer, à l'aide d'un théorème énergétique,  $\mathcal{P}_c$  en fonction de  $m, g, v, \mu, \alpha$  et  $\beta$ .
- 1.7 En déduire la valeur de la puissance du moteur qu'il faut installer sur le remonte-pente pour faire remonter tous les skieurs. Commenter cette valeur.

### Partie 2 - Cinématique du Super G

Le Super G est une course de ski au cours de laquelle le sportif doit passer de part et d'autre de "portes", qui sont des piquets plantés régulièrement dans la neige, en alternant les passages à gauche et à droite. On étudie, dans cette partie, le mouvement du skieur sur une section droite de la course : les portes sont alignées et séparées de  $L$  fixe. On suppose que la vitesse du skieur selon  $(Ox)$  est constante et notée  $v_0 : \dot{x} = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Le point de départ du skieur est  $(0, d)$ , avec  $d = 3$  m.



- 2.1 On suppose que la trajectoire du skieur est sinusoïdale :  $y(x) = a \cos(bx)$ . Donner les dimensions de  $a$  et  $b$ , puis les exprimer en fonction de  $d$  et  $L$  à l'aide du schéma.

- 2.2 Déterminer  $x(t)$  et  $y(t)$  en fonction de  $v_0$ ,  $t$ ,  $d$  et  $L$ .
- 2.3 Déterminer les vecteurs vitesse  $\vec{v}$  et accélération  $\vec{a}$  du skieur.
- 2.4 Pour des raisons de sécurité, il ne faut pas que l'accélération du skieur dépasse  $0,7g$ , il risque sinon de finir dans le décor...  
Donner l'expression puis la valeur de  $L_{min}$ , la distance entre les portes qui permette au skieur de faire le Super G en sécurité.

### Partie 3 - Le half-pipe à snowboard

Un.e snowboarder.euse (nommé.e "le sportif" dans la suite) se déplace dans un *half-pipe*, une piste ayant la forme d'un demi-cylindre de rayon  $R = 6$  m constant. On modélise le sportif comme un point matériel  $M$  de masse  $m = 70$  kg, glissant sans frottements, et repéré par l'angle  $\theta$  que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  forme avec l'axe vertical. Le mouvement débute en  $\theta = \pi/2$ , avec une vitesse initiale nulle. On suppose que tout le mouvement se passe dans le plan représenté sur le schéma.

- 3.1. Reproduire le schéma sur votre copie, et représenter la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  associée au point  $M$ .
- 3.2. Appliquer la seconde loi de Newton à  $M$ , et projeter l'équation dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .
- 3.3. Démontrer, à l'aide d'une des équations, que

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R} \cos \theta}$$

- 3.4. Démontrer à nouveau le résultat de la question 3.3, mais cette fois-ci avec une approche énergétique.
- 3.5. Dédire de ce qui précède l'expression de la norme de la réaction normale du support  $R_N$ , en fonction notamment de  $\theta$ . A quel endroit de la trajectoire  $R_N$  est-elle maximale ? Le sportif "se sent plus lourd.e" à ce point de la trajectoire : à combien de fois son propre poids cela correspond ?
- 3.6. On change dans cette question la condition initiale : le sportif sort du half-pipe, et atteint une hauteur  $h = 2$  m au dessus du bord de la piste. Estimer sa vitesse maximale lors de la course.

On essaie maintenant d'évaluer le nombre d'"oscillations" maximal que réalise le sportif avant d'être arrêté par les frottements solides. Le coefficient de frottement dynamique snowboard/neige est  $\mu_d = 0,04$ . Il commence à l'angle  $\theta_0 = \pi/2$ . On propose les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Un "tour de half-pipe" correspond à un trajet de l'angle  $\theta = \pi/2$  jusqu'à  $\theta = -\pi/2$  (ou inversement). On suppose que tous les tours de half-pipe sont complets (c'est-à-dire que le sportif atteint à chaque fois l'angle  $\pm\pi/2$ ).
  - On suppose que  $R_T$  est suffisamment faible pour que son effet dans la seconde loi de Newton soit négligeable devant les autres forces. En particulier, cela ne change pas l'expression de  $R_N$  obtenue dans les questions précédentes.
- 3.7. Commenter le réalisme des hypothèses simplificatrices.
- 3.8. Démontrer que, sur un tour de half-pipe, le travail des frottements solides vaut

$$W(\vec{R}_T) = 6\mu_d mgR$$

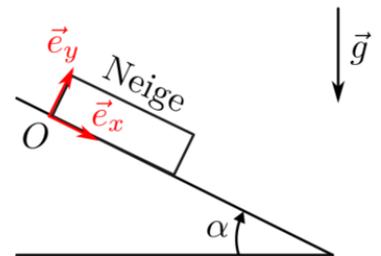
En déduire le nombre de tours que le sportif pourra effectuer avant de s'arrêter. A-t-on surestimé ou sous-estimé ce nombre ?

## Partie 4 - Etude d'une avalanche

**Rappel : traiter, au choix, la partie 4 ou la partie 5.** Cette partie est un classique, un peu plus calculatoire que la partie 5 mais un peu moins subtile.

On considère un bloc de neige de masse  $m$ , que l'on pourra réduire à un point matériel  $M$  en contact avec la pente de la montagne, d'angle  $\alpha$ . Le contact entre la neige et la montagne est décrit par les lois de Coulomb, et on notera  $\mu_s$  et  $\mu_d$  respectivement les coefficients de frottement statique et dynamique. Leurs valeurs dépend du type de neige (forme des grains et neige fraîche/tassée) :

Type de neige	$\mu_s$	$\mu_d$
Neige fraîche	5 – 10	0,3
Neige en gobelet	1,2	0,7
Neige à grains ronds	1,2	0,4



On étudie le mouvement du bloc de neige dans le référentiel terrestre, et on supposera pour simplifier qu'il est indéformable.

- 4.1 Montrer que le bloc de neige peut rester en équilibre tant que  $\alpha < \alpha_c$ , avec  $\alpha_c$  une valeur critique dont on donnera l'expression en fonction de  $\mu_s$ .
- 4.2 Parmi les trois types de neige, lesquelles peuvent provoquer des avalanches ?
- 4.3 On suppose que la pente a un angle  $\alpha = \alpha_c$ . La masse de neige subit, à  $t = 0$ , une légère perturbation (passage d'un skieur ?) qui lui donne une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ . Utiliser la seconde loi de Newton pour déterminer  $v(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{e}_x$ .
- 4.4 Montrer que l'énergie cinétique  $E_c(t)$  du bloc de neige vaut :

$$E_c(t) = \frac{m}{2} [g(\mu_s - \mu_d) \cos(\alpha_c)t + v_0]^2$$

- 4.5 Cette énergie cinétique est en fait communiquée à d'autres blocs de neige, au bord du glissement, qui se mettent donc à glisser à leur tour. Quel type de neige donne les avalanches les plus violentes ?
- 4.6 On suppose que, à un instant  $t_1$ , l'angle de la pente change et devient  $\beta < \alpha$ .  $\beta$  est constant. A quelle condition sur  $\beta$  la masse de neige peut ralentir ?
- 4.7 Calculer  $\Delta t = t_2 - t_1$ , avec  $t_2$  l'instant où le bloc de neige devient immobile, en fonction de  $v(t_1)$ ,  $\beta$ ,  $g$  et  $\mu_d$ . A quoi correspond physiquement  $\Delta t$  ?
- 4.8 Calculer numériquement  $\Delta t$  si  $v(t_1) = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  et  $\beta = 20^\circ$ , pour la neige en gobelets et la neige à grains ronds. Commenter.

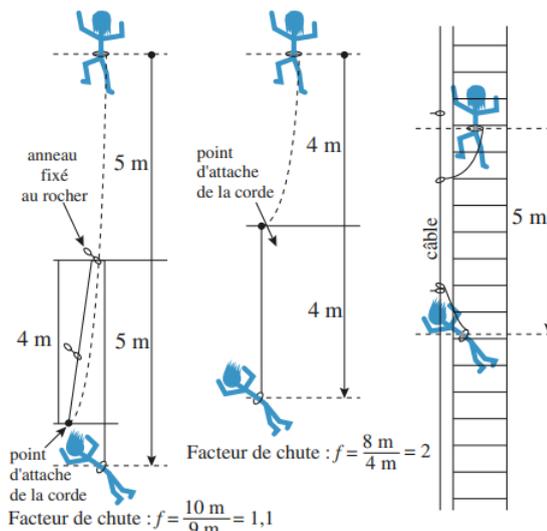
### Partie 5 - Chute d'un alpiniste

**Rappel : traiter, au choix, la partie 4 ou la partie 5.** Cette partie n'est pas très calculatoire, mais demande un peu plus de sens physique que la partie 4.

Lors d'une escalade, un grimpeur s'assure en passant sa corde dans des anneaux métalliques fixés au rocher. La corde peut coulisser librement dans ces anneaux. Le facteur de chute  $f$  est défini comme le rapport de la hauteur de chute  $h$  tant que la corde n'est pas tendue sur la longueur  $L$  de corde utilisée :

$$f = \frac{h}{L}$$

$0 < f < 2$  en situations "standard". Un facteur de chute élevé signifie que le grimpeur tombe sur une grande distance avant que la corde ne se tende, rendant le "choc" plus grand.



On considère, dans cette partie, un alpiniste de masse  $m = 80$  kg, faisant de l'escalade sur une paroi verticale et assuré par une corde passant dans des anneaux déjà posés là par des alpinistes.

- 5.1 Les cordes d'escalade peuvent résister à des forces de 18 kN, et les anneaux/rochers dans lesquels elles passent à 20 kN. Le bassin humain, lui, peut résister à des forces jusqu'à 12 kN. Calculer la masse maximale qu'on puisse accrocher à une corde d'escalade sans qu'elle se rompe, et expliquer pourquoi il est (extrêmement) dangereux de faire de l'escalade avec une corde très rigide.
- 5.2 La corde d'escalade, de longueur  $L$ , est assimilée à un ressort de longueur à vide  $L$  et de raideur  $k$ . On suppose que  $k$  dépend de la longueur de corde :  $k = \frac{1}{\epsilon L}$ , avec  $\epsilon$  la constante d'élasticité de la corde. Donner la dimension de  $\epsilon$ .
- 5.3 On considère qu'un ressort est **vertical**, initialement au repos, et qu'à un instant  $t = 0$ , une masse  $m$  accrochée à son extrémité tombe avec une vitesse initiale  $v_0$ . On cherche l'élongation maximale  $x_{\max} = l_{\max} - L$  du ressort, ainsi que la force maximale  $F_{\max}$  qu'il exerce sur  $m$ .
  - (a) Pour répondre à cette question, est-il préférable d'utiliser le PFD/seconde loi de Newton, ou une approche énergétique ? Justifier.
  - (b) Déterminer les expressions de  $x_{\max}$  et  $F_{\max}$ .
- 5.4 En appliquant le résultat précédent à la corde lors d'une chute de facteur de chute  $f$ , démontrer que

$$F_{\max} = mg \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{\epsilon mg}} \right)$$

*Indication :  $v_0$  s'obtient en étudiant le mouvement de chute libre tant que la corde n'a pas commencé à se tendre.*

- 5.5 Une chute deux fois plus longue avec une corde deux fois plus longue est-elle plus dangereuse ? Quel est le cas le plus dangereux, en termes du facteur de chute  $f$  ?
- 5.6 On dimensionne une corde d'alpinisme pour que la force maximale exercée sur le bassin du pauvre grimpeur soit de 9 kN, dans les conditions les plus défavorables ( $f = 2$ ).
  - (a) Calculer l'élasticité  $\epsilon$  de cette corde.

- (b) Calculer son élongation maximale, ainsi que la force maximale, si la corde fait 10 m de long et que l'alpiniste tombe de 5 m au-dessus du dernier point d'attache.
- 5.7 Sur le troisième schéma, le grimpeur est sur une *via ferrata* (ou un parcours d'acrobranche) : il est relié à une ligne de vie par une corde assez courte, de longueur  $L = 1$  m. Des anneaux métalliques de "blocage" sont espacés tous les 5 m. On donne l'élasticité de la corde  $\varepsilon = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1}$ .
- (a) On suppose que le grimpeur tombe de 5 m avant que la corde ne se bloque dans l'anneau du dessous. Calculer le facteur de chute, et la force maximale subie. Commenter.
- (b) Que peut-on améliorer sur le dispositif d'accroche pour éviter les accidents mortels sur la *via ferrata* ?