

Devoir Surveillé 5 - Corrigé

Question de cours

Voir...le cours !

Exercice I - Accord d'une guitare

Partie I - Vibration d'une corde de guitare

- I. (a) Une onde stationnaire est une onde dont les variations spatiale et temporelle sont découplées. C'est le cas de la forme proposée.
- (b) ω est la pulsation, $[\omega] = T^{-1}$. k est la norme du vecteur d'onde, $[k] = L^{-1}$. y_0 est l'amplitude de l'onde, ici c'est une perturbation sur une corde donc $[y_0] = L$.
- (c) La corde est fixe en $x = 0$ et en $x = L$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} y(x=0, t) = 0 \\ y(x=L, t) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, en remplaçant la forme de y proposée,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} \cos(\omega t) \cos \varphi = 0 \\ \cos(\omega t) \cos(\varphi + kL) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\cos \varphi = 0$, donc que $\varphi = -\pi/2$ convient. En remplaçant $\cos(kx - \pi/2) = \sin(kx)$, on a ensuite

$$\sin(kL) = 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}^* \quad kL = n\pi$$

le cas $n = 0$ ne décrivant pas une physique intéressante (corde non vibrante). Ainsi,

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}^* \quad k = \frac{n\pi}{L} = k_n}$$

- (d) Les modes propres sont les ondes stationnaires qui satisfont aux conditions aux limites, et donc aux contraintes sur k et φ de la question précédente :

$$\boxed{y_n(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

- (e) La propagation est non dispersive, ce qui signifie que v_φ est indépendante de ω . Il en découle une relation de proportionnalité entre ω et k :

$$\boxed{\omega = ck \implies \omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{L}}$$

En remplaçant,

$$\boxed{y_n(x, t) = y_0 \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

- (f) S'il y a un nœud de vibration, l'amplitude y est nulle pour tout t . Cela signifie nécessairement que

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \implies \exists m \in \mathbb{N} \quad \frac{n\pi x}{L} = m\pi \implies \boxed{\exists m \in \mathbb{N} \quad x = \frac{m}{n}L = x_m}$$

Comme $x < L$, on a $m \leq n$. Il y a donc $n + 1$ nœuds. Pour le schéma, voir cours S_1 , corde de Melde.

(g) Par définition de la longueur d'onde,

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$$

On peut réécrire cette relation sous la forme

$$L = \frac{n}{2} \lambda_n$$

Les seules ondes qui peuvent s'établir sur la corde sont celles dont la longueur d'onde est un multiple demi-entier de L (pour pouvoir "découper" en parts égales la corde avec les nœuds). $\lambda_n/2$ est la distance entre deux nœuds.

2. (a) $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$ avec ce qui précède. Ainsi, la fréquence fondamentale est

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

(b) Avec la relation de la célérité,

$$c = \frac{T}{\rho \pi r^2} \implies f_{ac} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho \pi r^2}}$$

Ainsi,

$$T = 4L^2 f_{ac}^2 \rho \pi r^2 = 113 \text{ N}$$

pour la corde du La. C'est équivalent au poids d'un objet de masse $m \sim T/g \sim 11,5 \text{ kg}$, ce qui est conséquent !

- (c) La masse volumique de la corde et la longueur ne changent pas, donc seul le facteur $f_{ac}^2 r$ change entre la corde du Mi et la corde du La. Ce facteur est plus grand pour la corde Mi, donc $T(\text{Mi}) > T(\text{La})$.

3. (a) $f' = 2f$, donc

$$\frac{c}{2X} = 2 \frac{c}{2L} \implies X = \frac{L}{2}$$

Il faut donc pincer la corde à la moitié de sa longueur pour doubler la fréquence.

(b) On obtient un La à l'octave supérieure, par définition.

(c) Il faut que $f' = f_{ac}(\text{La})$. En notant X la longueur de la corde "raccourcie" par le doigt,

$$X = \frac{c(\text{Mi})}{2f_{ac}(\text{La})}$$

Or, $c(\text{Mi}) = 2L f_{ac}(\text{Mi})$, donc

$$X = \frac{f_{ac}(\text{Mi})}{f_{ac}(\text{La})} L = 0,750L$$

Il faut donc appuyer sur la corde à une distance $L/4$ du sillet de tête.

- (d) $f_k = \frac{c}{2X_k} = 2^{k/12} f_{ac}$, donc

$$X_k = 2^{-k/12} \frac{c}{2f_{ac}} = 2^{-k/12} L$$

- (e) Les X_k sont en progression géométrique de raison $2^{-1/12}$, leur différence est donc une fonction décroissante de k . Les frettes sont de plus en plus proches lorsqu'on descend le manche.
- (f) $f_{ac}(\text{La}) = 2^{k/12} f_{ac}(\text{Mi})$. On peut chercher "par essai erreur" la valeur de k , ou utiliser une fonction logarithme $\log_2(x) = \ln x / \ln 2$:

$$k = 12 \log_2 \left(\frac{f_{ac}(\text{La})}{f_{ac}(\text{Mi})} \right) = 5$$

Il faut donc appuyer sur la cinquième frette la corde de Mi grave pour obtenir un La.

Partie 2 - Accordage de la guitare "à l'oreille"

- I. (a) Les deux ondes p_1 et p_2 sont progressives, r est le même pour les deux, et seule la fréquence diffère, donc

$$p_1(r, t) = p_0 \cos \left(2\pi f_c \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \quad ; \quad p_2(r, t) = p_0 \cos \left(2\pi f_{ac} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

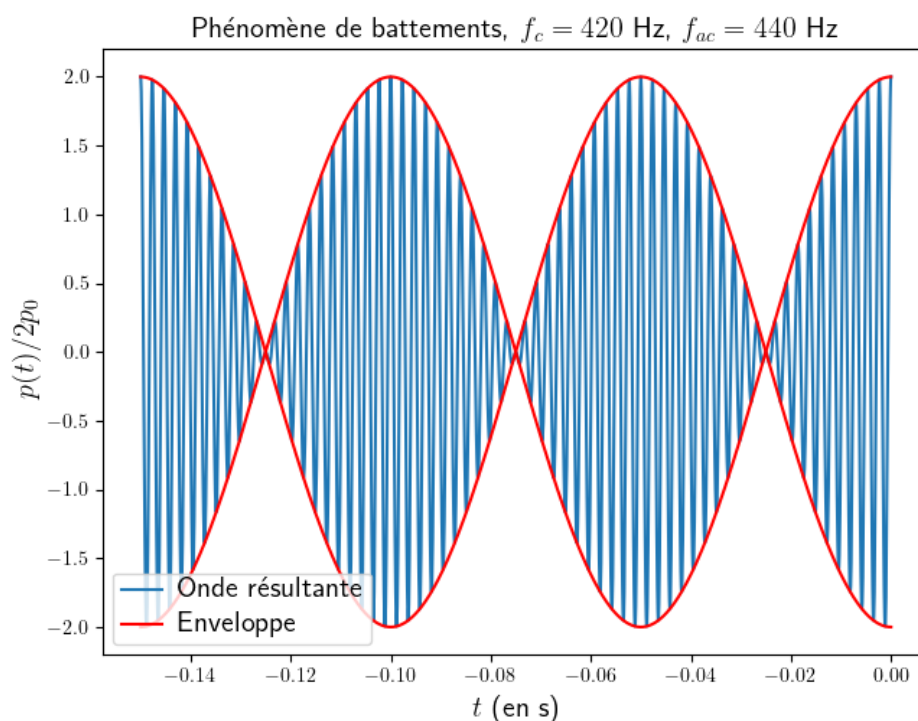
- (b) On fait la somme des deux cosinus :

$$p(r, t) = p_1(r, t) + p_2(r, t)$$

$$= 2p_0 \cos \left[\frac{2\pi f_c t - \frac{2\pi f_c r}{c} + 2\pi f_{ac} t - \frac{2\pi f_{ac} r}{c}}{2} \right] \cos \left[\frac{2\pi f_c t - \frac{2\pi f_c r}{c} - 2\pi f_{ac} t + \frac{2\pi f_{ac} r}{c}}{2} \right]$$

$$p(r, t) = 2p_0 \cos \left[\pi(f_c + f_{ac}) \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left[\pi(f_c - f_{ac}) \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

- (c) Le musicien entend le phénomène de *battements*. L'amplitude sonore varie "rapidement" avec une fréquence moyenne $\langle f \rangle = (f_c + f_{ac})/2$ proche de f_{ac} , mais l'amplitude de l'onde sonore varie "lentement" avec une fréquence $|f_c - f_{ac}|/2$ d'autant plus faible que les deux fréquences sont proches. Sur le graphe ci-dessous, la différence de fréquences est très exagérée)



2. (a) Si $f_c \rightarrow f_{ac}$, les battements ralentissent puisque $\Delta f \rightarrow 0$.

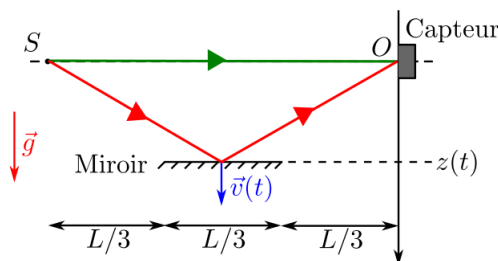
(b) $T_{bat} = \frac{1}{f_{bat}} = \frac{2}{\Delta f}$, donc

$$\Delta f_{min} = \frac{2}{T_{bat}} = 0,4 \text{ Hz}$$

- (c) Le phénomène de battements se produit toujours, sans modifier la fréquence des battements, mais l'annulation de l'amplitude n'est plus totale (car l'onde de moins forte amplitude ne peut pas annuler complètement les oscillations de l'autre).
- (d) La même méthode peut s'appliquer pour la corde de Ré, car $f(R) = 2^{5/12} f(La)$. On pince la corde du La à la 5ème frette, puis on fait sonner les deux cordes simultanément, et on essaie de faire disparaître les battements.

Exercice 2 - Mesure de l'accélération de la pesanteur avec un miroir de Lloyd

I.



Les deux portions de rayon rouge ont la même longueur, par symétrie, car le rayon se réfléchit exactement au centre de miroir.

2. On note (1) le rayon vert et (2) le rayon rouge. La différence de marche en O se définit par

$$\delta(O) = (SO)_2 - (SO)_1 + \delta_r$$

avec $(SO)_1$ et $(SO)_2$ les chemins optiques parcourus par chaque rayon, et δ_r le terme dû à la réflexion. On peut facilement exprimer ce dernier en fonction du déphasage :

$$\Delta\varphi_r = \pi = \frac{2\pi\delta_r}{\lambda} \implies \delta_r = \frac{\lambda}{2}$$

D'autre part, les deux rayons se propagent dans l'air, d'indice optique égal à 1, donc on peut remplacer les chemins optiques par les distances géométriques. $(SO)_1 = L$ par lecture sur le schéma. Il faut travailler un peu plus pour $(SO)_2$, mais en introduisant l'image S' de S par le miroir, qui se situe $2z(t)$ en-dessous de O , on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$(SO)_2 = S'O = \sqrt{L^2 + (2z)^2} = L\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{L}\right)^2}$$

Comme $z/L \ll 1$, on peut développer la racine au premier ordre :

$$S'O \simeq L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2z}{L} \right)^2 \right) = L + \frac{2z^2}{L}$$

Finalement, en recombinaison des différentes contributions,

$$\delta(O) = \frac{2z^2}{L} + \frac{\lambda}{2}$$

3. La formule de Fresnel donne, au point O :

$$I(O) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta(O)}{\lambda} \right) \right) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi z^2}{\lambda L} + \pi \right) \right)$$

En utilisant $\cos(x + \pi) = -\cos x$, on obtient

$$I(O, t) = 2I_0 \left(1 - \cos \left(\frac{4\pi z^2}{\lambda L} \right) \right)$$

A $t = 0$, $z = 0$ donc

$$I(O, t = 0) = 2I_0(1 - \cos(0)) = 0$$

ce qui semble cohérent avec la géométrie du problème. Le premier maximum d'intensité lumineuse se produit lorsque le cosinus vaut -1 , c'est-à-dire lorsque

$$\frac{4\pi z(t_1)^2}{\lambda L} = \pi \implies z(t_1)^2 = \frac{\lambda L}{4}$$

On peut alors déterminer t_1 , mais il faut le résultat de la question suivante (ou faire tout de suite l'étude mécanique).

4. Le miroir étant en chute libre, sa position initiale étant $z(t = 0) = 0$ et sa vitesse initiale étant nulle. N'étant soumis qu'à son poids, la seconde loi de Newton appliquée à ce miroir dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) donne

$$m\vec{a} = m\vec{g} \implies \ddot{z} = g$$

Une double intégration avec les conditions initiales donne

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

En remplaçant, on pourrait obtenir l'expression de l'intensité en O au cours du temps :

$$I(O, t) = 2I_0 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi g^2 t^4}{\lambda L} \right) \right)$$

mais on peut surtout déterminer la valeur de t_1 de la question précédente :

$$z(t_1)^2 = \frac{g^2 t^4}{4} = \frac{\lambda L}{4} \implies t_1 = \left(\frac{L\lambda}{g} \right)^{1/4}$$

5. Le $n^{\text{ième}}$ maximum d'intensité est donné par

$$\frac{\pi g^2 t^4}{\lambda L} = (2n - 1)\pi \implies t_n = \left(\frac{2L\lambda}{g^2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)^{1/4}$$

6. On peut calculer la valeur de g à partir d'une seule valeur de t_n , ou alors en faisant la moyenne (ce qu'on ferait avec l'accès à un ordinateur, ou avec la calculatrice si vous en avez eu le temps lors du devoir). Pour obtenir l'incertitude-type associée à cette mesure, comme on a accès à plusieurs mesures (presque) indépendantes, on peut calculer l'écart-type de la série de données donnant g . Dans tous les cas, on obtient $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. *Faire un petit programme en Python pour calculer l'incertitude sur g est un excellent entraînement !*

Exercice 3 - Ressort lesté en rotation

- I. • **Système** : M
 • **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
 • **Bilan des forces** :
- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.
 - Réaction normale du support : $\vec{R}_N = R_N\vec{e}_z$ avec $R_N > 0$.
 - On néglige les frottements, donc pas de réaction tangentielle du support non plus.
 - Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(r - l_0)\vec{e}_r$, car le ressort a une longueur r , et que le vecteur unitaire allant du support fixe jusqu'au point M est $\vec{e}_r$

Le PFD s'écrit alors

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}$$

En le projetant dans la base cylindrique, et avec l'expression de l'accélération dans ces coordonnées (que vous pouvez redémontrer si vous ne la connaissez pas par cœur) :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k(r - l_0) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \\ m\ddot{z} = -mg + R_N \end{cases}$$

2. Dans la première équation, en remplaçant $\omega = \dot{\theta}$:

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = -kt + kl_0 \implies \ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)r = \frac{k}{m}l_0$$

soit, en posant $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{r} + (\omega_r^2 - \omega^2)r = \omega_r^2 l_0$$

3. On commence par résoudre l'équation homogène

$$(\mathcal{H}) \quad \ddot{r} + (\omega_r^2 - \omega^2)r = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit alors

$$X^2 + (\omega_r^2 - \omega^2) = 0 \implies X^2 = \omega^2 - \omega_r^2$$

Il y a alors plusieurs de figure. Dans les deux cas $\omega \neq \omega_r$, il faut rajouter une solution constante

$$r_p = \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} l_0$$

à la solution de $(\mathcal{H})$.

- Si $\omega_r = \omega$ (non demandé par l'énoncé): l'équation devient $\ddot{r} = \omega^2 l_0$, dont la solution s'écrit

$$r(t) = \frac{1}{2}\omega^2 l_0 t^2 + At + B$$

avec A et B deux constantes. $r \rightarrow \infty$ aux temps longs, ce qui remet en question le modèle : le ressort va finir par céder !

- Si $\omega < \omega_r$: $X^2 < 0$ donc les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes :

$$X_{\pm} = \pm j \sqrt{\omega_r^2 - \omega^2} = \pm j \omega_0$$

La solution complète de l'équation sera donc de la forme

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} l_0$$

- Si $\omega > \omega_r$: $X^2 > 0$ donc l'équation caractéristique admet deux racines réelles :

$$X_{\pm} = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_r^2} = \pm \Omega$$

et les solutions sont de la forme

$$r(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} + \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} l_0$$

Cette fois-ci, les solutions posent problème : $A e^{\Omega t}$ diverge quand $t \rightarrow \infty$ si $A \neq 0$. Il faut donc nécessairement que $A = 0$, ce qui n'est pas toujours compatible avec les conditions initiales. Dans ces situations, le ressort finira par casser, ce qui remet en cause le modèle de la force de rappel du ressort.

4. Dans cette hypothèse, on a

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} l_0$$

Dans le cas où le mouvement est circulaire, il faut nécessairement que $A = 0$ et $B = 0$ pour que $r = \text{cste}$. Cela signifie que

$$r_{\text{eq}} = \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} l_0$$

Ce mouvement est forcément uniforme, car $\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$, ce qui signifie que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = r_{\text{eq}} |\omega| = \text{cste}$$

5. Les conditions initiales dans cette situation sont $r(0) = 0$, et $\dot{r}(0) = 0$. On applique ces conditions à r et à

$$\dot{r} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

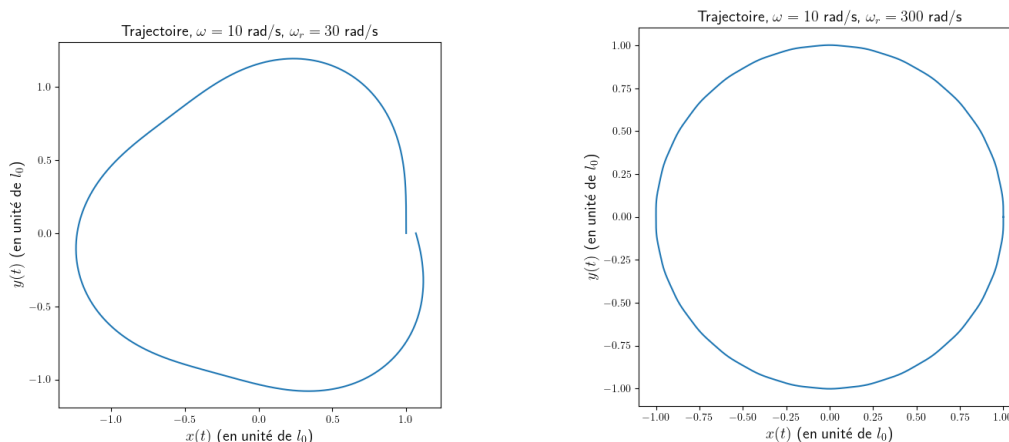
ce qui mène à

$$\begin{cases} l_0 = A + \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} l_0 \\ 0 = B \omega_0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{\omega_0^2} l_0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Finalement,

$$r(t) = \frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{\omega_0^2} l_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} l_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{\omega_0^2} l_0 \cos(\omega_0 t) + r_{\text{eq}}$$

Le mouvement selon r est sinusoïdal autour de la position "d'équilibre" du ressort $r = r_{\text{eq}}$. Comme $\omega_r > \omega_0$, M peut faire plusieurs oscillations avant de faire un tour complet. Comme souvent, le schéma ci-dessous expliquera bien mieux la situation qu'un long paragraphe. On voit cependant que lorsque $\omega_r \gg \omega$, la trajectoire devient circulaire, car l'amplitude des oscillations diminue.



6. Si on reprend le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N - k(r - l_0)\vec{e}_r$$

Or, $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ si on suppose que le mouvement est plan. De plus, $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ se compensent dans ces conditions. En remplaçant $r\vec{e}_r = \vec{r}$ et $l_0 = 0$, on obtient

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_r^2\vec{r} = \vec{0}}$$

ce qui est bien une équation d'oscillateur harmonique.

7. La solution de cette équation s'écrit

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cos(\omega_r t) + \vec{B} \sin(\omega_r t)$$

On en déduit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega_r \vec{A} \sin(\omega_r t) + \omega_r \vec{B} \cos(\omega_r t)$$

En appliquant les deux conditions initiales,

$$\vec{A} = \vec{r}_0 \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}_0}{\omega_r}$$

et donc

$$\boxed{\vec{r}(t) = \cos(\omega_r t)\vec{r}_0 + \sin(\omega_r t)\frac{\vec{v}_0}{\omega_r}}$$

8. En projetant la relation précédente,

$$\begin{cases} x(t) &= r_0 \cos(\omega_r t) \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_r t) \end{cases}$$

La trajectoire ressemble à un cercle "écrasé" car x et y ne varient pas dans des intervalles de même longueur. C'est une *trajectoire elliptique* ! *Remarque* : ce n'est pas un hasard... la première loi de Kepler ne s'applique pas seulement aux forces en $1/r^2$, mais aussi aux forces en r , comme celle de cet exercice. Ce sont les deux seules forces centrales qui peuvent donner des trajectoires elliptiques !

9. On peut réécrire

$$\begin{cases} \frac{x}{r_0} = \cos(\omega_r t) \\ \frac{\omega_0 y}{v_0} = \sin(\omega_r t) \end{cases}$$

et on a, avec $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = 1$$

Cette équation ressemble à celle du cercle, sauf qu'il y aurait "deux rayons différents" : le demi-grand axe a et le demi-petit axe b . Voir le chapitre M_6 .

Exercice 4 - Frottements solides et craie sur un tableau noir

1. Le point B se déplaçant à vitesse V constante, $x_B = b + Vt$.
2. $\vec{R}_N$ est toujours dirigée vers le "haut" de la surface de contact, et $\vec{R}_T$ est toujours opposée à la direction du mouvement.
3. En général, $\mu_d < \mu_s$.
4.
 - **Système** : M .
 - **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
 - **Bilan des forces** :
 - Poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$
 - Réaction du support $\vec{R} = -R_T \vec{e}_x + R_N \vec{e}_y$
 - Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(l(t) - l_0)(-\vec{e}_x) \simeq kl(t) \vec{e}_x$ car $l_0 \simeq 0$. Attention au sens de la force ici : le "point d'accroche" est B !

Le PFD s'écrit alors

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

puis on projette :

- Sur $\vec{e}_y$,

$$m\ddot{y} = R_N - mg$$

Or, il n'y a pas de mouvement sur y , donc $\ddot{y} = 0$, ce dont on tire

$$R_N = mg$$

- Sur $\vec{e}_x$,

$$m\ddot{x} = kl - R_T$$

5. (a) Si le bloc est fixe, alors $l(t)$ augmente au cours du temps, ce qui augmente la norme de la force de rappel du ressort. Pour conserver l'équilibre, il faut donc que la réaction tangentielle $\vec{R}_T$ soit de plus en plus intense : c'est possible dans une certaine mesure, mais dès que la première loi de Coulomb ne sera plus vérifiée, le bloc devra commencer à glisser sur le support.
- (b) Si le bloc est immobile, $\ddot{x} = 0$, donc

$$R_T = kl(t)$$

Le bloc ne pourra plus rester immobile dès que

$$R_T = \mu_s R_N = \mu_s mg$$

c'est-à-dire dès que

$$l = l_m = \frac{\mu_s mg}{k}$$

- (c) Initialement, $l = l_0 \simeq 0$. Le bloc étant immobile pendant toute cette première phase, $x_B(0) = 0$ et la longueur du ressort s'exprime comme

$$l(t) = x_B(t) = Vt$$

Ainsi, on peut calculer t_1 avec

$$l(t_1) = l_m \implies \boxed{t_1 = \frac{\mu_s mg}{kV}}$$

6. (a) Lorsque le bloc était immobile, on avait $x = 0$, et le bloc est en train de glisser, donc $x(t) > 0$. De plus, à $t = 0$, le ressort avait pour longueur $l_m = l(t = 0)$. Lorsque le temps avance, le ressort se raccourcit car x augmente, d'où le signe $-$. Cependant, le point B avance toujours à la vitesse V constante, d'où le terme $+Vt$.
- (b) $R_N = mg$ est toujours valable. Cependant, maintenant que le bloc glisse, c'est la deuxième loi de Coulomb qui s'applique :

$$R_T = \mu_d R_N = \mu_d mg$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement projetée sur $\vec{e}_x$, on obtient

$$m\ddot{x} = kl(t) - \mu_d mg = kl_m + kVt - kx - \mu_d mg$$

Soit, en divisant par m et en réorganisant un peu les termes,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kV}{m}t + \frac{kl_m}{m} - \mu_d g$$

Enfin, en remplaçant $l_m = \frac{\mu_s mg}{k}$, on obtient

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kV}{m}t + \mu_s g - \mu_d g$$

Il faut donc poser $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\alpha = \mu_s - \mu_d$ et $\beta = \frac{kV}{m}$ pour obtenir l'équation de l'énoncé.

ω_0 est la pulsation propre associée aux oscillations du ressort.

- (c) La résolution de l'équation homogène associée ne pose pas de difficulté particulière :

$$x_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Pour rechercher la solution particulière, on utilise la forme proposée, qui vérifie $\ddot{x}_p = 0$:

$$\omega_0^2 a_1 + \omega_0^2 a_2 t = \frac{kV}{m}t + (\mu_s - \mu_d)g$$

C'est une égalité entre polynômes de même degré, qui n'est vérifiée que si les deux polynômes ont les mêmes coefficients. On en déduit

$$a_1 = \frac{(\mu_s - \mu_d)g}{\omega_0^2} = \frac{mg(\mu_s - \mu_d)}{k} \quad ; \quad a_2 = \frac{kV}{m\omega_0^2} = V$$

et donc finalement

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + Vt + \frac{mg(\mu_s - \mu_d)}{k}$$

et par dérivation,

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) + V$$

Il reste à déterminer A et B avec les conditions initiales proposées. Les deux étant nulles,

$$A + \frac{mg(\mu_s - \mu_d)}{k} = 0 \implies A = -\frac{mg(\mu_s - \mu_d)}{k}$$

et

$$B\omega_0 + V = 0 \implies B = -\frac{V}{\omega_0}$$

ce qui donne finalement

$$x(t) = \frac{mg(\mu_s - \mu_d)}{k} (1 - \cos(\omega_0 t)) - \frac{V}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + Vt \quad ; \quad \dot{x}(t) = \frac{mg\omega_0(\mu_s - \mu_d)}{k} \sin(\omega_0 t) - V \cos(\omega_0 t) + V$$

(d) Le bloc cesse de glisser dès que $\dot{x} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{mg\omega_0(\mu_s - \mu_d)}{k} \sin(\omega_0 t_2) = -V(1 - \cos(\omega_0 t_2))$$

Un peu de réarrangement donne

$$\frac{1 - \cos(\omega_0 t_2)}{\sin(\omega_0 t_2)} = -\frac{mg\omega_0(\mu_s - \mu_d)}{kV}$$

Enfin, il reste à remplacer $\frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_0^2}$ pour obtenir

$$\frac{1 - \cos(\omega_0 t_2)}{\sin(\omega_0 t_2)} = -\frac{g(\mu_s - \mu_d)}{V\omega_0}$$

(e) L'équation de la question précédente est impossible à résoudre telle quelle. C'est une fraction rationnelle de cosinus/sinus, donc passer par la tangente de l'angle moitié permet de la transformer en équation polynomiale ! Si on pose $a = \omega_0 t_2$ et $T = \tan(a/2)$,

$$1 - \cos a = 1 - \frac{1 - T^2}{1 + T^2} = \frac{1 + T^2 - 1 + T^2}{1 + T^2} = \frac{2T^2}{1 + T^2}$$

et donc

$$\frac{1 - \cos a}{\sin a} = \frac{2T^2}{1 + T^2} \cdot \frac{1 + T^2}{2T} = T = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

Il suffit alors de remplacer dans l'équation de la question précédente :

$$\tan\left(\frac{\omega_0 t_2}{2}\right) = -\frac{(\mu_s - \mu_d)g}{V\omega_0}$$

7. (a) On reprend les formules obtenues dans l'exercice :

$$t_1 = \frac{\mu_s mg}{kV} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad ; \quad t_2 = \frac{2}{\omega_0} \arctan\left(\frac{(\mu_d - \mu_s)g}{V\omega_0}\right) = -1,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Le signe de t_2 pose déjà problème : c'est en fait une limite de la modélisation. Dire que $l(t = 0) = l_m$ signifie qu'on commence tout juste le glissement, ce qui nous place un peu "à la limite". Les lois de Coulomb sont phénoménologiques : elles fonctionnent "pas trop mal", mais il faut se méfier de leur validité dans les cas "à la limite". De plus, dans l'exemple de la craie : elle a plutôt tendance à quitter le contact avec le tableau, ce qui invalide également le modèle. Bref, à prendre avec des pincettes...cela dit, on voit que t_2 est plus faible que t_1 : on peut donc estimer que le mouvement est périodique de période t_1 .

- (b) $l(t)$ est "en dents de scie" : elle monte linéairement lors des phases où le bloc est immobile, et décroît brutalement lorsque le bloc glisse.
- (c) Si on estime que la période du mouvement est t_1 , alors la fréquence associée est

$$\nu = \frac{1}{t_1} = \frac{kV}{\mu_s mg} = 2,1 \text{ kHz}$$

Cela signifie que la craie glisse périodiquement, avec une fréquence ν . Le son est un signal "en dents de scie" de fréquence fondamentale ν , et contient donc éventuellement des harmoniques de ν . C'est un son très aigu, voire strident, et donc désagréable, que tout le monde a déjà entendu une fois dans sa vie !

- (d) Si on casse la craie en deux, on divise sa masse par deux, ce qui a pour effet de doubler ν . Mais en même temps, on change la raideur du système masse-ressort la modélisant : une craie plus courte demandera une force plus élevée pour la déformer d'une même longueur, à matériau constant. Il se trouve que k est inversement proportionnelle à la longueur de la craie : si on casse la craie en deux, on multiplie k par deux, et donc on double encore ν .

Finalement, casser la craie en deux multiplie par quatre la fréquence du son émis. Avec les valeurs de l'énoncé, on obtiendrait $\nu' = 8 \text{ kHz}$: c'est encore audible, mais les harmoniques ne le sont presque plus. On peut donc imaginer que raccourcir encore plus la craie rendra le crissement inaudible. *On peut également imaginer que les fabricants de craie les dimensionnent pour éviter le crissement !*