Devoir Surveillé 4 - Corrigé

Question de cours

Voir...le cours !

Exercice 1 - Comportement fréquentiel d'un circuit LC réel

1. - A basse fréquence, on remplace la bobine par un fil, et le condensateur par un interrupteur ouvert. Ainsi, le courant peut circuler, et la tension aux bornes de la résistance vaut, par la formule du pont diviseur de tension,
$$u_s = \frac{R}{r+R}u_e \simeq u_e$$
car $R >> r$. Le signal "passe".
   - A haute fréquence, le condensateur devient un fil, et ainsi $u_s = 0$: le signal "ne passe pas"

   Finalement, le circuit est un filtre passe-bas. On remarquera que la tension u_s dans la bande passante n'est pas strictement égale à u_e, à cause des résistances : le signal est légèrement atténué.
2. On regroupe les impédances deux à deux :
   - En série pour r et L : $\underline{Z_1} = r + jL\omega$,
   - En parallèle pour R et C : $\underline{Z_2} = \dfrac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \dfrac{R}{1+jRC\omega}$.

   En appliquant la formule du pont diviseur de tension :
$$\underline{U_s} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{U_e} = \frac{\dfrac{R}{1+jRC\omega}}{r+jL\omega+\dfrac{R}{1+jRC\omega}}$$
   On commence par simplifier les "fractions de fractions", en multipliant par $1+jRC\omega$ en haut et en bas :
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{R}{R+(r+jL\omega)(1+jRC\omega)}$$
   Puis on adimensionne en divisant en haut et en bas par R : on obtient alors les fameux facteurs sans dimension $L\omega/R$, $RC\omega$ et $LC\omega^2$ (attention, erreur de calcul classique : vous ne pouvez distribuer le $1/R$ que dans une seule des deux parenthèses au dénominateur, car c'est un produit !) :
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+\left(\frac{r}{R}+\frac{jL\omega}{R}\right)(1+jRC\omega)} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}+jrC\omega+\dfrac{jL\omega}{R}-LC\omega^2} = \frac{1}{\dfrac{r+R}{R}+jrC\omega+\dfrac{jL\omega}{R}-LC\omega^2}$$
   J'ai mis le terme $\dfrac{r+R}{R}$ entre crochets pour souligner qu'il est indépendant de ω : c'est ce terme qui doit devenir le 1 du dénominateur de la fonction de l'énoncé. On va donc diviser en haut et en bas par ce facteur :
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\dfrac{R}{r+R}}{1-\dfrac{RLC}{r+R}\omega^2+j\dfrac{R}{r+R}\left(rC+\frac{L}{R}\right)\omega}$$

On identifie alors $\boxed{A = \frac{R}{r+R}}$ et $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{R+r}{RLC}}}$. Pour déterminer Q, on identifie

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{R}{r+R}\left(rC + \frac{L}{R}\right) \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{r+R}{R}\frac{1}{rC+\dfrac{L}{R}}\sqrt{\frac{RLC}{R+r}}$$

On pourra s'arrêter à $\boxed{Q = \sqrt{\frac{r+R}{R}}\frac{\sqrt{LC}}{rC+\dfrac{L}{R}}}$.

Remarque : on peut réécrire la fraction comme

$$\frac{\sqrt{LC}}{rC+\dfrac{L}{R}} = \frac{1}{r\sqrt{\dfrac{C}{L}}+\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}} = \frac{1}{Q_{r,\parallel}+Q_{R,\rightarrow}}$$

avec $Q_{r,\parallel}$ le facteur de qualité du circuit rLC parallèle et $Q_{r,\rightarrow}$ le facteur de qualité du circuit RLC série. Le filtre de cet exercice est finalement une genre de combinaison de ces deux circuits simples !

3. Avec les définitions habituelles,

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

et

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log G(\omega) = 20\log A - 10\log\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right]}$$

- A très basse fréquence, le 1 domine dans le logarithme, ce qui donne

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega << \omega_0) = 20\log A}$$

- A très haute fréquence, c'est le terme en ω^4 qui domine dans le logarithme, ce qui donne

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega >> \omega_0) = 20\log A - 40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

4. Pour la phase, on prend l'argument de la fonction de transfert :

$$\varphi(\omega) = \arg(A) - \arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) = -\arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$$

car A est réel et positif. L'argument restant est moins trivial, il faut disjoindre les cas où la partie réelle est positive ou négative (voir le cours) :

$$\boxed{\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left[\dfrac{\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right] & \text{si } \omega < \omega_0 \\ -\pi - \arctan\left[\dfrac{\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right] & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}}$$

On peut alors trouver les limites à basse et haute fréquence en faisant tendre ω vers 0 ou $+\infty$:

$$\boxed{\begin{cases} \varphi(\omega) & \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \varphi(\omega) & \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} -\pi \end{cases}}$$

5. Voir les graphes du cours sur les diagrammes asymptotiques du passe-bas d'ordre 2.

6. **Etude détaillée du gain.**

   (a) Le gain s'écrit $G = \frac{1}{\sqrt{f(\omega/\omega_0)}}$. La fonction racine étant croissante, si G est maximal, cela signifie que f est minimale (avec $x = \omega/\omega_0$).

   $$\frac{df}{dx} = 2\cdot(-2x)\cdot(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 4x\left(\frac{1}{2Q^2} - 1 + x^2\right)$$

   (b) La dérivée de f s'annule toujours en $x = 0$ à cause du facteur $4x$. Les autres racines de $\dfrac{df}{dx} = 0$ s'obtiennent en résolvant

   $$x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

   Il y a alors deux cas de figure :

   - Si $\dfrac{1}{2Q^2} > 1$, il n'y a aucune racine réelle autre que 0.
   - Si $\dfrac{1}{2Q^2} < 1$, il y a alors deux autres racines réelles :

     $$x_\pm = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

     Seule la racine positive a un sens physique, car $\omega > 0$, donc $x > 0$.

   Il existe donc un autre extremum de f si $\boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$, donné par $\boxed{x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$.

   (c) x_r étant un minimum de f, cela signifie que, à condition que $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, G admet un maximum en

   $$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

   On vérifie la condition en faisant l'application numérique pour Q :

   $$\boxed{Q = \sqrt{\frac{r+R}{R}}\frac{\sqrt{LC}}{rC + \dfrac{L}{R}} = 4,19 > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

   $\boxed{\text{Il y a bien un maximum en } \omega_r}$.

   (d) En remplaçant, on obtient directement

   $$G_{\text{dB,max}} = 20\log A - 10\log\left[\left(1-x_r^2\right)^2 + \left(\frac{x_r}{Q}\right)^2\right] = 20\log A - 10\log\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}\right)$$

Or, $A = \frac{R}{R+r} = 1 + 1,0 \cdot 10^{-6} \simeq 1$, donc $\log A \simeq 0$. Ainsi,

$$\boxed{G_{\text{dB,max}} = -10 \log\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}\right) = 12{,}5\,\text{dB}}$$

Ce gain est supérieur à 0 : il y a bien une résonance. On peut également calculer ω_r :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 x_r = \sqrt{\frac{(R+r)}{RLC}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)} = 455\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

que l'on peut comparer avec $\omega_0 = 461\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$: les deux pulsations sont très proches.

7. **Cas limite : le filtre LC idéal.**

(a) On retrouve $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$: c'est la pulsation propre du circuit LC idéal. On le voit facilement sur le schéma : la résistance r disparaît simplement, et la résistance R peut être remplacée par un interrupteur ouvert aux bornes de C, qui ne joue aucun rôle électrique dans le circuit.
Pour le facteur de qualité, on a, en remplaçant $r = 0$:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{r+R}{R}}\frac{\sqrt{LC}}{rC + \dfrac{L}{R}} = \sqrt{LC}\frac{R}{L} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

On retrouve bien le comportement du circuit LC.

(b) Pour ce filtre,

$$\underline{H'}(\omega) = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{\dfrac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2}$$

ce qui peut se réécrire en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$\boxed{\underline{H'}(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Le gain vaut

$$G(\omega) = \left|\underline{H'}(\omega)\right| = \frac{1}{\left|1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right|}$$

On a immédiatement $G'(\omega) \underset{\omega\to\omega_0}{\longrightarrow} +\infty$: le gain diverge. Tout cela est cohérent, car le gain du filtre réel augmente avec la valeur de Q, et diverge lorsque $Q \to +\infty$.

8. **Une autre limite de la bobine.**

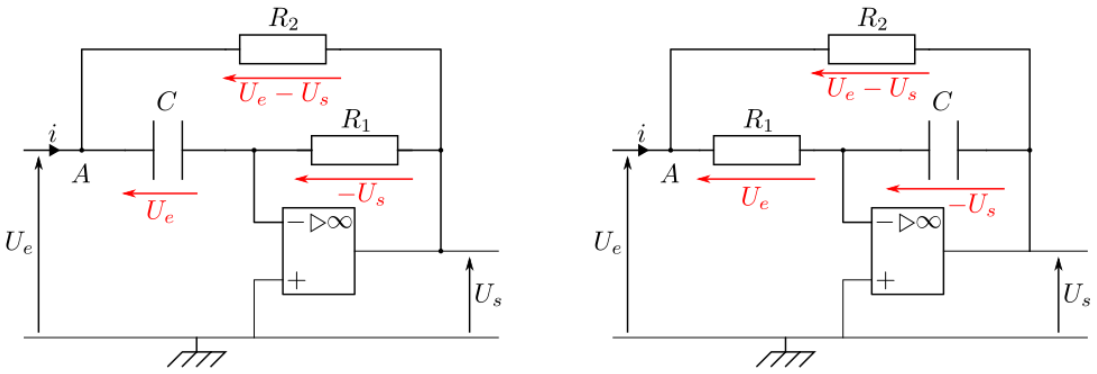
(a) On a l'association en parallèle de $R + jL\omega$ et de $\dfrac{1}{jC\omega}$, donc

$$\boxed{\underline{Z_b} = \frac{1}{jC\omega + \dfrac{1}{R + jL\omega}} = \frac{R + jL\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}}$$

(b) Ce modèle réel n'est valable qu'à très haute fréquence, donc le comportement du circuit à basse fréquence n'est pas modifié. A haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, ce qui permet au courant d"ignorer" le fait que l'inductance soit devenue un interrupteur ouvert. Cependant, le condensateur d'origine du circuit se comporte toujours comme un fil : on a donc toujours $u_s = 0$. $\boxed{\text{Le comportement du circuit n'a pas été modifié}}$.

Exercice 2 - Simulation et mesure d'impédances

Partie 1 - Simulateurs d'impédance à ALI



1. Il y a, dans les deux montages, une rétroaction sur la sortie inverseuse ($-$) de l'ALI : il fonctionne donc en régime linéaire. Cela implique que $\boxed{\varepsilon = 0}$. De plus, l'impédance d'entrée de l'ALI est supposée infinie dans le modèle idéal, donc $\boxed{i_+ = i_- = 0}$.
2. **Etude du montage** 1

   (a) Voir schéma ci-dessus.

   (b) La loi des nœuds donne immédiatement, avec la loi d'Ohm généralisée :

   $$\boxed{\underline{i} = \frac{\underline{U_e} - \underline{U_s}}{R_2} + jC\omega\underline{U_e}}$$

   (c) On a également, en notant $\underline{i_1}$ l'intensité traversant R_1 $\underline{U_s} = -R_1\underline{i_1} = -jR_1C\omega\underline{U_e}$ car $\underline{V_-} = 0$. Cela permet d'écrire

   $$\boxed{\underline{H_1}(\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = -jR_1C\omega}$$

   Ce filtre multiplie par $j\omega$ la tension d'entrée, $\boxed{\text{c'est donc un intégrateur}}$.

   (d) En remplaçant $\underline{U_s} = -jR_1C\omega\underline{U_e}$ dans la loi des nœuds, on obtient

   $$\underline{i} = \frac{\underline{U_e}}{R_2} + \frac{jR_1C\omega}{R_2}\underline{U_e} + jC\omega\underline{U_e}$$

   et donc, avec la définition,

   $$\boxed{\underline{Z_{t,1}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{jR_1C\omega}{R_2} + jC\omega} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + jC_{\text{eq}}\omega}}$$

avec $\boxed{C_{\text{eq}} = C\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}$. Ce circuit est donc équivalent à la mise en parallèle d'une résistance R_2 et d'un condensateur de capacité C_{eq}. L'intérêt du montage est que l'on peut facilement changer la capacité équivalente, en jouant sur les valeurs de R_1 et R_2. Il simule donc *une capacité de valeur quelconque*.

3. **Etude du montage 2.**

   (a) Voir le schéma plus haut.

   (b) La loi des nœuds en A s'écrit, en utilisant immédiatement la loi d'Ohm généralisée :

$$\boxed{\underline{i} = \frac{\underline{U_e} - \underline{U_s}}{R_2} + \frac{\underline{U_e}}{R_1}}$$

   (c) Comme précédemment, on peut exprimer $\underline{U_e}$ en fonction de $\underline{U_s}$, en notant $\underline{i_1}$ l'intensité traversant le condensateur :

$$\underline{U_s} = -\frac{\underline{i_1}}{jC\omega} = -\frac{\underline{U_e}}{jR_1C\omega}$$

   dont on tire

$$\boxed{\underline{H_2}(\omega) = -\frac{1}{jR_1C\omega}}$$

   Ce circuit divise la tension d'entrée par $j\omega$, il a donc $\boxed{\text{un comportement intégrateur}}$.

4. En remplaçant $\underline{U_s}$ par $\underline{U_e}$ dans la loi des nœuds, on obtient

$$\underline{i} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jR_1R_2C\omega}\right)\underline{U_e}$$

   On en déduit l'impédance totale du montage :

$$\boxed{\underline{Z_{t,2}} = \frac{\underline{U_e}}{\underline{i}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL_{\text{eq}}\omega}}}$$

   avec $\boxed{L_{\text{eq}} = R_1R_2C}$ une "inductance équivalente", car on reconnaît l'impédance totale de résistances R_1 et R_2, ainsi que d'une inductance L_{eq} toutes branchées en parallèle. Ce circuit permet de *simuler une inductance*.

5. Ce montage est potentiellement intéressant pour deux raisons : le circuit n'utilise pas de bobine, qui peut poser problème en électronique. Il est également possible de simuler des valeurs très élevées d'inductance, difficiles à obtenir en réalité !

Partie 2 - Ponts de mesure d'impédance

4. **Etude du pont équilibré.**

   (a) Le courant circulant dans l'ampèremètre étant nul, cela signifie que $\boxed{\underline{V_B} = \underline{V_C}}$

   (b) Comme $\underline{i_g} = 0$, $\boxed{\text{on se retrouve dans la configuration du pont diviseur de tension}}$. On a donc

$$\begin{cases} \underline{U_2} = \underline{V_B} - \underline{V_D} &= \dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} E_0 \\ \\ \underline{U_4} = \underline{V_C} - \underline{V_D} &= \dfrac{\underline{Z_4}}{\underline{Z_3} + \underline{Z_4}} E_0 \end{cases}$$

Comme le pont est équilibré, il est nécessaire que $\underline{U_2} = \underline{U_4}$, ce qui donne

$$\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}} = \frac{\underline{Z_4}}{\underline{Z_3}+\underline{Z_4}} \quad \Longrightarrow \quad \underline{Z_2}\underline{Z_3} + \underline{Z_2}\underline{Z_4} = \underline{Z_4}\underline{Z_1} + \underline{Z_4}\underline{Z_2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\underline{Z_1}\underline{Z_4} = \underline{Z_2}\underline{Z_3}}$$

On dit souvent que pour un pont équilibré, le produit croisé des impédances est égal.

5. **Etude du pont déséquilibré**.

   (a) Par la loi d'Ohm, $\boxed{\underline{U_{BC}} = R_g \underline{i_g}}$.

   (b) Si on suppose qu'on peut toujours appliquer le pont diviseur de tension, les relations de la 4.b restent vraies :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{U_2} = \underline{V_B} - \underline{V_D} &= \dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}} E_0 \\ \\ \underline{U_4} = \underline{V_C} - \underline{V_D} &= \dfrac{\underline{Z_4}}{\underline{Z_3}+\underline{Z_4}} E_0 \end{cases}}$$

   (c) Comme $\underline{V_D} = 0$, $\underline{U_{BD}} = \underline{V_B}$ et $\underline{U_{CD}} = \underline{V_C}$. Il suffit d'utiliser la loi d'Ohm sur R_g :

$$\boxed{\underline{i_g} = \frac{\underline{V_B} - \underline{V_C}}{R_g} = \frac{E_0}{R_g}\left(\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}} - \frac{\underline{Z_4}}{\underline{Z_3}+\underline{Z_4}}\right)}$$

   On retrouve bien la condition de la question 4.b : le pont est équilibré si $\underline{i_g} = 0$, c'est-à-dire si le terme entre parenthèses est nul.

6. **Mesure de bobine : le pont de Maxwell.** On peut calculer les impédances équivalentes :

$$\underline{Z_1} = R_1 \quad ; \quad \underline{Z_2} = \frac{R_2}{1+jR_2C\omega} \quad ; \quad \underline{Z_3} = R_x + jL_x\omega \quad ; \quad \underline{Z_4} = R_4$$

   puis appliquer la relation d'équilibre du pont :

$$R_1R_4 = \frac{R_2}{1+jR_2C\omega}(R_x + jL_x\omega) \quad \Longrightarrow \quad R_x + jL_x\omega = \frac{R_1R_4}{R_2}(1+jR_2C\omega)$$

   En identifiant les parties réelles et imaginaires, on peut alors mesurer R_x et L_x :

$$\boxed{\begin{cases} R_x &= \dfrac{R_1R_4}{R_2} \\ \\ L_x &= R_1R_4C \end{cases}}$$

   Pour mesurer les caractéristiques de la bobine, il suffit de la brancher dans le pont de mesure, et régler les valeurs de R_2 et C jusqu'à équilibrer le pont (ce qui se voit expérimentalement car le galvanomètre entre B et C ne mesure plus aucun courant). Il suffit alors de relever les valeurs de C et R_2, celles de R_1 et R_4 étant fixes et connues.

7. **Mesure de condensateur : le pont de Sauty.** Le principe est exactement le même, en changeant les impédances :

$$\underline{Z_1} = R_1 \quad ; \quad \underline{Z_2} = \frac{R_2}{1+jR_2C\omega} \quad ; \quad \underline{Z_3} = R_3 \quad ; \quad \underline{Z_4} = \frac{R_x}{1+jR_xC_x\omega}$$

   La condition d'équilibre du pont s'écrit alors :

$$\frac{R_1R_x}{1+jR_xC_x\omega} = \frac{R_3R_2}{1+jR_2C\omega} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{R_x} + jC_x\omega = \frac{R_1}{R_3R_2}(1+jR_2C\omega)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} R_x &= \dfrac{R_3 R_2}{R_1} \\ \\ C_x &= \dfrac{R_1 C}{R_3} \end{cases}}$$

On procède de la même manière que le pont de Maxwell, en faisant varier R_2 et C_2.

8. **Capteur de luminosité.**

   (a) On peut s'inspirer des ponts de Maxwell et Sauty. Cette fois-ci, on souhaite mesurer une résistance, donc nul besoin d'avoir des condensateurs variables, qui servent à mesurer les parties imaginaires d'impédance. On peut proposer

   $$\underline{Z_1} = R_1 \quad ; \quad \underline{Z_2} = R_2 \quad ; \quad \underline{Z_3} = R_3 \quad ; \quad R_4 = R_p$$

   avec R_2 réglable comme précedémment. La condition d'équilibre du pont se traduit par

   $$R_1 R_p = R_2 R_4 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R_p = \frac{R_2 R_4}{R_1}}$$

   Remarque culturelle : ce circuit s'appelle le pont de Wheatstone.

   (b) On peut transformer une loi de puissance en loi affine en passant au logarithme :

   $$\ln R_p = \ln\left(\alpha \Phi^{-k}\right) = \ln(\alpha) - k\ln(\Phi)$$

   Si on trace $\ln R_p = f(\ln \Phi)$, on obtiendra une droite d'ordonnée à l'origine $\ln \alpha$ et de pente $-k$. Tracer cette courbe et déterminer ces deux cœfficients permets de calculer le flux lumineux par la mesure de R_p, connaissant α et k :

   $$\Phi = \left(\frac{R_p}{\alpha}\right)^k$$

   Un calculateur analogique ou numérique peut calculer la valeur de Φ à partir de la mesure de R_p, et de la connaissance de k et α.

Exercice 3 - Effet de cave

1. On revient au lien entre la pulsation et la période, qui vaut $T = 24\,\mathrm{h}$:

   $$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$$

2. Les complexes sont adaptés car on étudie un système **linéaire** en régime sinusoïdal forcé. On pourra alors remplacer

   $$\theta_e(t) = T(t) - T_{\text{ref}} = A\cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \underline{\theta_e}(t) = Ae^{j\omega t}$$

   Un pont diviseur de tension donne facilement

   $$\underline{\theta}(t) = \frac{\dfrac{1}{jC_{\text{th}}\omega}}{R_{\text{th}} + \dfrac{1}{jC_{\text{th}}\omega}} Ae^{j\omega t}$$

   Or, comme $\underline{\theta}(t) = \underline{\theta} e^{j\omega t}$, et en faisant un peu de ménage dans l'expression, on a

   $$\boxed{\underline{\theta} = \frac{A}{1 + jR_{\text{th}}C_{\text{th}}\omega}}$$

3. Le terme au dénominateur n'a pas de dimension : on peut donc poser $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}}$, et

$$\boxed{\underline{\theta} = \frac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

Il suffit alors de calculer le module de cette expression :

$$\boxed{\theta_0 = |\underline{\theta}| = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

4. Pour que l'amplitude des variations de température θ_0 soit grande, il faut que ω soit le plus faible possible : ce système se comporte comme un $\boxed{\text{filtre passe-bas}}$. Cela signifie que l'air de la cave ne change pas facilement de température si celle de l'extérieur change rapidement (la diffusion thermique n'a pas le temps de se produire). Inversement, si les variations de température de l'extérieur sont lentes, la diffusion thermique a le temps de s'établir, et cela fera changer la température à l'intérieur de la cave.

5. On veut $\theta_0 = \dfrac{A}{10}$. On a donc

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = 10 \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{99}}$$

Or,

$$\omega_0 = \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{hC_{\text{th}}}$$

donc

$$\boxed{h = \frac{\lambda S\sqrt{99}}{\omega C_{\text{th}}} = 0{,}17\,\text{m}}$$

Il suffit que la cave se situe à une vingtaine de centimètres de profondeur : c'est facile à réaliser ! C'est pour cela qu'il fait en général frais dans une cave, même en été : il peut faire chaud à l'extérieur, mais les températures chutent à la nuit tombée et la "durée de chaud" est trop courte pour changer de manière importante la température dans la cave.

6. Si $\omega = \omega_0$, alors $h = \delta$. Il en découle immédiatement que

$$\boxed{\delta = \frac{\lambda S}{C_{\text{th}}\omega} = \frac{\lambda S T}{2\pi C_{\text{th}}}}$$

δ est la "longueur caractéristique", l'"épaisseur de sol" sur laquelle les variations de la température sont conséquentes. Si ω est plus faible, alors δ augmente : des variations plus lentes de température pénètrent plus profondément dans le sol.

7. On peut calculer δ pour les variations annuelles de température. Cela signifie que

$$T = 1\,\text{an} = 3600 \cdot 24 \cdot 365 = 3{,}15 \cdot 10^7\,\text{s}$$

En faisant à nouveau l'application numérique, on obtient $\delta(1\,\text{an}) = 16\,\text{m}$. Ainsi, une cave de maison "ressent" les variations saisonnières de température : il fait plus froid dans la cave en hiver qu'en été, une fois qu'on a laissé le temps à l'énergie thermique de diffuser dans le sol. En revanche, si on creuse une cave bien plus profonde, alors la température y restera constante tout au long de l'année : les glacières de Versailles font entre 20 et 30 mètres de profondeur. Peut-être avez vous déjà visité une grotte souterraine : la température y est en général constante, pour les mêmes raisons !

Exercice 4 - Accéléromètre d'appareil photo

1. $\boxed{l(t) = z(t) - z_0(t)}$ (z_0 dépend du temps ici : c'est ce qui jouera le rôle d'excitation sinusoïdale).
2. On rédige *proprement* toute étude mécanique !
   Système : masse M
   Référentiel : terrestre, supposé galiléen (dans cet exercice, c'est le référentiel $\mathcal{R}$. En deuxième année, vous verrez qu'on aurait pu mener l'étude dans le référentiel $\mathcal{A}$, qui n'est pas galiléen)
   Bilan des forces :
   - Poids $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\,\vec{e}_z$ (attention, l'axe (Oz) est orienté vers le bas !)
   - Force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\,\vec{e}_z = -k(z(t) - z_0(t) - l - 0)\,\vec{e}_z$
   - Force de frottements $\vec{f} = -\alpha\left(\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{dz_0}{dt}\right)\vec{e}_z$

   On applique alors la seconde loi de Newton à la masse (sa vitesse $\vec{v}$ étant mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$) :
   $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = mg\,\vec{e}_z - k(z - z_0 - l_0)\,\vec{e}_z - \alpha\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right)\vec{e}_z$$
   Or, $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2}\,\vec{e}_z$. En projetant sur $\vec{e}_z$ et en réarrangeant les termes :
   $$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}(z_0 + l_0) + \frac{\alpha}{m}\frac{dz_0}{dt}}$$
3. Si l'appareil et M sont tous deux immobiles, on peut écrire que
   $$\frac{dz}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \frac{dz_0}{dt} = 0$$
   et que $z = z_{\text{eq}}$. L'équation donne alors
   $$\frac{k}{m}z_{\text{eq}} = \frac{mg}{k} + l_0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$
   Ce qui est cohérent avec la réalité : la M se trouve "un peu plus bas que l_0" à l'équilibre en raison de son poids.
4. On fait le changement de variable $\zeta(t) = z(t) - z_0(t) - z_{\text{eq}}$ (c'est en fait l'écart entre la position de la masse et sa position d'équilibre, *étudiée dans le référentiel* $\mathcal{A}$). On peut exprimer les dérivées de ζ :
   $$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \quad ; \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z_0}{dt^2}$$
   On remplace $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ dans l'équation différentielle, et on regroupe les termes :
   $$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2z_0}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right) + \frac{k}{m}(z - z_0) = 0$$
   puis on reconnaît ζ et $\dfrac{d\zeta}{dt}$:
   $$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{d\zeta}{dt} + \frac{k}{m}\zeta = -\frac{d^2z_0}{dt^2}$$

Or, $z_0(t) = A\cos(\omega t)$, donc $\dfrac{d^2z_0}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t)$. Enfin, on définit la *pulsation propre* ω_0 et le *facteur de qualité* Q :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

pour obtenir la forme canonique de l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\zeta}{dt} + \omega_0^2\zeta = A\omega^2\cos(\omega t)}$$

5. On passe en complexes en remplaçant $\zeta(t)$ par $\underline{\zeta}(t)$, les dérivées par des multiplications par $j\omega$, et $\cos(\omega t)$ par $e^{j\omega t}$. L'équation devient :

$$-\omega^2\underline{\zeta}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\zeta}(t) + \omega_0^2\underline{\zeta}(t) = A\omega^2 e^{j\omega t}$$

En notant $\underline{\zeta}(t) = \underline{\zeta}e^{j\omega t}$, en simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$-\omega^2\underline{\zeta} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\zeta} + \omega_0^2\underline{\zeta} = A\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\underline{\zeta} = \frac{A\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}}$$

6. On commence par réécrire $\underline{\zeta}$ pour faire apparaître x, en divisant en haut et en bas par ω^2 :

$$\underline{\zeta} = \frac{A}{\dfrac{1}{x^2} - 1 + \dfrac{j}{Qx}}$$

On en déduit facilement l'amplitude ($A > 0$)

$$\boxed{\zeta_0 = |\underline{\zeta}| = \frac{A}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2x^2}}}}$$

7. - **Basses fréquences** : $x \to 0$, ce qui donne

$$\zeta_0 \sim \frac{A}{\sqrt{\dfrac{1}{x^4}}} \sim x^2 A \to 0$$

Le système n'est pas sensible aux basses fréquences.

- **Hautes fréquences** : $x \to \infty$, ce qui donne

$$\zeta_0 \sim \frac{A}{\sqrt{1}} \sim A \to A$$

Le système est sensible aux hautes fréquences

Ainsi, le système a un comportement de $\boxed{\text{filtre passe-haut}}$.

8. $\boxed{\text{Il y a résonance si } \zeta_0 \text{ présente un maximum à fréquence non nulle.}}$. Cela revient à chercher si la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2x^2}}$$

admet un maximum. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\frac{df}{dx} = 2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{-2}{x^3}\right) - \frac{2}{Q^2x^3} = 4\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}\right) - \frac{2}{Qx^3} = \frac{1}{x^5}\left(4x^2 - 4 - \frac{2x^2}{Q^2}\right)$$

Il faut donc résoudre

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(4 - \frac{2}{Q^2}\right)x^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{4Q^2}{4Q^2 - 2} = \frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}$$

cette équation admet des solutions réelles si et seulement si

$$\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Seule la solution positive $\boxed{x_r = \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}}$ a un sens physique, car $x > 0$. On vérifie que f est bien minimale en x_r : le signe de $\dfrac{df}{dx}$ est celui de

$$4x^2 - 4 - \frac{2x^2}{Q^2} = \left(4 - \frac{2}{Q}\right)x^2 - 4$$

Or, $4 - \dfrac{2}{Q^2}$ >0, ce qui signifie que

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} < 0 & \text{si } x < x_r \\ \dfrac{df}{dx} > 0 & \text{si } x > x_r \end{cases}$$

f est donc d'abord décroissante, puis croissante : x_r est bien un minimum de f.

$\boxed{\text{Le système présente bien une résonance si } Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

9. Le plus dur est déjà fait : il y a une résonance en

$$x_r 2 = \frac{2Q^2}{2Q^2 - 1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\omega_r = \omega_0 x_r = Q\omega_0\sqrt{\frac{2}{2Q^2 - 1}}}$$

10. Si $Q >> 1$, alors $2Q^2 - 1 \simeq 2Q^2$, ce qui permet de simplifier

$$\boxed{\omega_r \simeq \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{Q^2}} \simeq \omega_0}$$

11. On veut mesurer A sur la plus grande plage possible (donc $\zeta_0 \simeq A$ sur la plus grande plage possible). Il faut alors :

- éviter la résonance, donc $Q \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- avoir un facteur de qualité le plus grand possible car la coupure se produit à ω de plus en plus grand si Q diminue.

En combinant ces ceux contraintes, $\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ convient}}$.

On veut alors ω_0 le plus faible possible. Comme $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et que m est fixée, il faut prendre k le plus faible possible. On choisir donc $\boxed{k = 1{,}0 \cdot 10^3 \,\mathrm{N \cdot m^{-1}}}$. On peut enfin calculer la valeur de α correspondante, **en faisant très attention à bien convertir la masse en kilogrammes** :

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{mk}}{Q} = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}}$$

Bonus - Physique "de coin de table"

La fréquence typique de vibration de la vitre est de l'ordre du Hertz (c'est la fréquence de la marche). Cela correspond $f_r \simeq f_0 \simeq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. On peut estimer la masse de la vitre, le verre ayant une masse volumique $\rho \simeq 3{\cdot}10^3 \,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ (valeur à estimer grossièrement !). La vitre fait quelques millimètres d'épaisseur, mettons $e = 2\,\mathrm{mm}$, et a une surface $S = 15\,\mathrm{m^2}$. Ainsi

$$m = Se\rho \simeq 90\,\mathrm{kg}$$

ce qui est un ordre de grandeur raisonnable vu la taille de la vitre (on a négligé la masse de l'encadrement mais on pourrait l'estimer aussi). On en déduit

$$k = 4\pi^2 m f_0 \simeq 4 \cdot 10^3 \,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

(pas trop de chiffres significatifs, on fait une estimation grossière !). Cet ordre de grandeur parait raisonnable, il faut une dizaine de Newtons (poids d'une masse de $1\,\mathrm{kg}$) pour "déplacer" la vitre de quelques millimètres en appuyant dessus par exemple, si elle n'est pas complètement fixée dans le bâti (ce qui est le cas si le simple fait de marcher la fait osciller !)