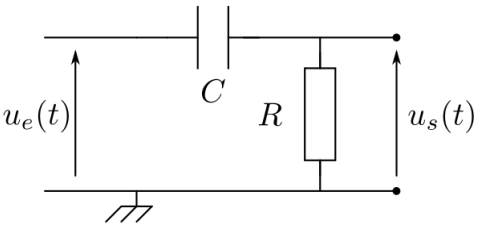
Devoir Surveillé 4

L'épreuve dure 4 heures. Le sujet est constitué de 8 pages, et comporte une question de cours et quatre exercices. L'usage de la calculatrice est autorisé.

*Résoudre les exercices de ce sujet sur **copies doubles**. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements comptent pour une part importante de l'évaluation de la copie, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.*

Question de cours (maximum 20 minutes !)

1. Faire l'étude complète du filtre ci-contre : étude asymptotique, fonction de transfert, diagramme de Bode en gain et en phase. On introduira une pulsation de coupure ω_0, et on donnera la bande passante de ce filtre.



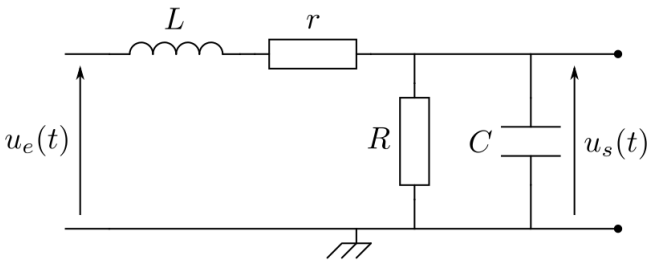
2. On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$.
   (a) Caractériser le filtre (passe-haut, bas, bande ?).
   (b) Justifier que ce filtre a un comportement inégrateur à une certaine condition sur ω que l'on précisera.
   (c) On met, en entrée de ce filtre, une tension
   $$U_e(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\cos(2\omega_0 t)$$
   avec $(a,b) \in \mathbb{R}_+$. Déterminer $U_s(t)$.
   (d) Dans le cas plus général, si on met en entrée de ce filtre une tension $U_e(t)$ périodique (*et suffisamment "gentille" mathématiquement*), on montre que cette tension peut s'écrire sous la forme
   $$U_e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$
   avec $c_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(c_n, \varphi_n) \in \mathbb{R}_+ \times [0\,;2\pi]$. Quel est le nom du scientifique qui a découvert cela ? Sans faire de calculs, expliquer comment trouver $U_s(t)$ à partir de cette décomposition, ainsi que de la fonction de transfert du filtre.

Exercice 1 - Comportement fréquentiel d'un circuit LC réel

Les modélisations des composants vues en cours sont des versions *idéalisées* de la réalité. Les bobines et condensateurs réels ont des défauts que l'on peut modéliser électriquement :

- Les bobines sont constituées d'un long fil conducteur enroulé. Il dissipe donc un peu d'énergie par effet Joule : il se comporte comme une résistance de très faible valeur.
- Les condensateurs peuvent se décharger au cours du temps, même sans être connecté à un circuit, car leur environnement immédiat est légèrement conducteur (air humide, enveloppe du composant, ...).

On considère un filtre LC série simple, mais on tient compte du comportement réel des composants, en ajoutant une résistance r faible en série avec la bobine (qui modélise la résistance du fil la constituantà, et une résistance R élevée en parallèle du condensateur (qui modélise la décharge lente du condensateur à cause de son environnement). La tension de sortie $u_s(t)$ est prise aux bornes du condensateur, et on étudie le circuit en *sortie ouverte*.



Données :

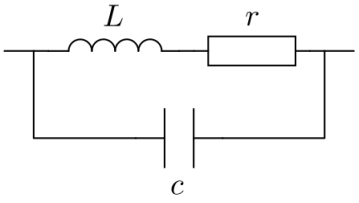
- Caractéristiques des dipôles idéaux : $L = 100\,\text{mH}$, $C = 47{,}0\,\mu\text{F}$.
- Résistances internes des dipôle réels : $R = 10{,}6\,\text{M}\Omega$, $r = 11{,}0\,\Omega$.

1. Etudier le comportement asymptotique du filtre, à basse et à haute fréquence, et déterminer son comportement général (*passe-...*).
2. Définir la fonction de transfert en tension $\underline{H}(\omega)$ de ce circuit. Puis la calculer en la présentant sous la forme
$$\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$
en donnant les expressions de A, ω_0 et Q en fonction de L, C, r et R (*Attention : ω_0 n'est pas le même que pour le circuit LC "habituel" !*.
3. Définir et calculer le gain $G(\omega)$, puis le gain en décibels $G_{\text{dB}}(\omega)$. Déterminer les expressions asymptotiques du gain en décibels à très haute et très basse fréquence.
4. Faire de même avec le déphasage $\varphi(\omega)$ du filtre.
5. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques du filtre.
6. **Etude détaillée du gain**.
   (a) Justifier que les extrema du gain sont les mêmes que ceux de la fonction $f : x \mapsto (1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+$, puis calculer $\dfrac{df}{dx}$.
   (b) Montrer que 0 est un extremum de f en toutes circonstances, mais que f présente un autre extremum pour $x = x_r \neq 0$, à une condition sur Q que l'on précisera. Déterminer alors la valeur de x_r correspondante.
   (c) On admet que x_r est un minimum de f. Qu'est-ce que cela implique sur le diagramme de Bode en gain du filtre de cet exercice ? *On justifiera que x_r existe bien !*
   (d) On définit $\omega_r = x_r\omega_0$. Calculer $G_{\text{dB,max}} = G_{\text{dB}}(\omega_r)$, puis faire l'application numérique pour ω_r et $G_{\text{dB,max}}$. Commenter.
7. **Cas limite : le filtre LC idéal.**
   (a) Que deviennent ω_r et Q si $r \to 0$ et $R \to \infty$? Faire un schéma équivalent du circuit dans ces conditions, et justifier qu'on retrouve bien un filtre LC simple.
   (b) Déterminer la fonction de transfert en tension $\underline{H'}(\omega)$ de ce filtre idéal. Calculer le gain, et montrer qu'il diverge en $\omega = \omega_0$. Est-ce cohérent avec le comportement $Q \to \infty$ du filtre réel ?

8. **Une autre limite de la bobine.** A haute fréquence, la bobine a également un comportement capacitif ! On le modélise en ajoutant en parallèle un condensateur de très faible capacité c.

   (a) Calculer l'impédance $\underline{Z_b}$ de cette bobine.

   (b) On remplace la bobine réelle du filtre LC au début de l'exercice par ce modèle plus raffiné. Refaire l'analyse asymptotique : est-ce que le comportement du filtre est modifié ?



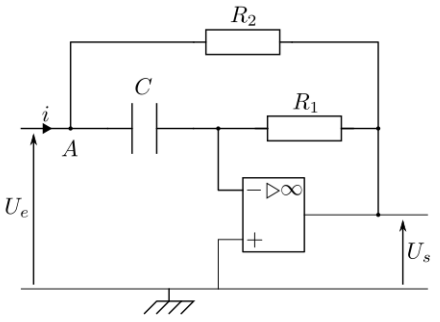
Modèle réel de bobine à haute fréquence

Exercice 2 - Simulation et mesure d'impédances

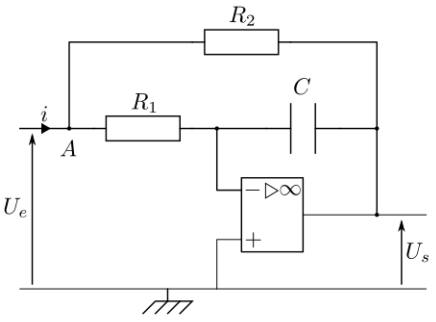
Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes. Des circuits permettant de simuler des capacités ou des inductances de valeur réglable sont proposés dans la première partie, et le principe des ponts de mesure d'impédance est développé dans la deuxième partie.

Partie 1 - Simulateurs d'impédance à ALI

On peut utiliser des ALI pour simuler des composants passifs dont on peut facilement contrôler les caractéristiques. On étudie, dans cette partie, les deux circuits ci-dessous.



Montage 1



Montage 2

1. Donner, en justifiant, les valeurs des courants d'entrée i_+ et i_- et de la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = V_+ - V_-$ pour chaque montage.
2. **Etude du montage** 1**.**

   (a) Reproduire le schéma sur votre copie, et représenter les tensions aux bornes de C, R_1 et R_2. Les exprimer en fonction de U_e et U_s.

   (b) Ecrire la loi des nœuds au point A.

   (c) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H_1} = \underline{U_s}/\underline{U_e}$ de ce montage. Quel est son effet sur la tension d'entrée ?

   (d) On définit l'impédance totale du montage

   $$\underline{Z_{t,1}} = \frac{\underline{U_e}}{\underline{i}}$$

   La calculer, et montrer que ce montage est équivalent à l'association en parallèle d'une résistance R_{eq} et d'une capacité C_{eq} dont on déterminera les expressions en fonction de R_1, R_2 et C. Pourquoi dit-on que ce montage est un *simulateur de capacité* ?

3. **Etude du montage** 2**.**

   (a) Reproduire le schéma sur votre copie, et représenter les tensions aux bornes de C, R_1 et R_2. Les exprimer en fonction de U_e et U_s.

(b) Ecrire la loi des nœuds au point A.

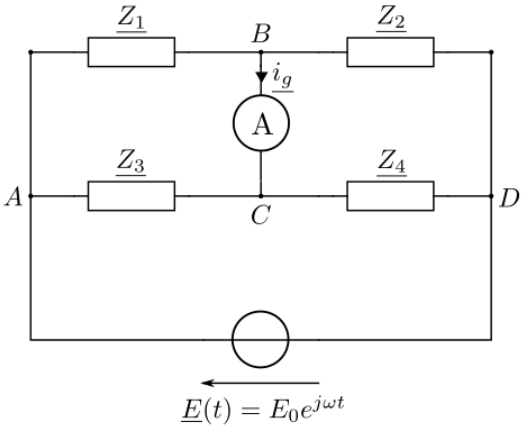
(c) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H_2} = \underline{U_s}/\underline{U_e}$ de ce montage. Quel est son effet sur la tension d'entrée ?

(d) On définit l'impédance totale du montage $\underline{Z_{t,2}}$ de la même manière que pour le montage 1. La calculer, et montrer que ce montage est équivalent à l'association en parallèle de R_1, R_2 et d'une inductance L_{eq} dont on déterminera l'expression en fonction de R_1, R_2 et C. Pourquoi dit-on que ce montage est un *simulateur d'inductance* ?

(e) Quels sont les intérêts pratiques de ce montage, par rapport à l'usage d'une simple bobine ?

Partie 2 - Ponts de mesure d'impédance

Pour mesurer des inductances, on a longtemps exploité le principe du *pont de mesure*, schématisé ci-contre. Leur usage est devenu plus rare vers la fin du XX^e siècle, et l'avènement des instruments de mesure d'impédance directe (LCRmètre, Ohmmètre, ...). Le schéma général du pont est représenté ci-contre : quatre impédances $\underline{Z_k}$ sont placées "en croix", les deux nœuds centraux B et C étant reliés par un fil. On place, sur ce fil, un galvanomètre (instrument de mesure de l'intensité électrique, très sensible), que l'on modélise comme un ampèremètre de résistance interne très faible. On alimente le circuit avec une tension sinusoïdale $E(t)$ de pulsation ω.



En général, on connaît trois des quatre impédances, et on cherche à mesurer la valeur de la quatrième. Pour cela, on va chercher à *équilibrer le pont*.

4. **Etude du pont équilibré.** On dit que le pont est *équilibré* si $\underline{i_g} = 0$.

   (a) Quelle relation existe-t-il alors entre les potentiels V_B et V_C aux nœuds B et C ?

   (b) Justifier qu'il est autorisé d'appliquer la formule du pont diviseur de tension à deux reprises dans le cas du pont équilibré. Démontrer alors que

$$\underline{Z_1}\,\underline{Z_4} = \underline{Z_2}\,\underline{Z_3}$$

5. **Etude du pont déséquilibré.** Si le pont est déséquilibré, le courant traversant le galvanomètre n'est plus nul : $\underline{i_g} \neq 0$. On le modélise alors comme une résistance R_g de très faible valeur.

   (a) Exprimer $\underline{U_{BC}} = \underline{V_B} - \underline{V_C}$ en fonction de $\underline{i_g}$ et R_g.

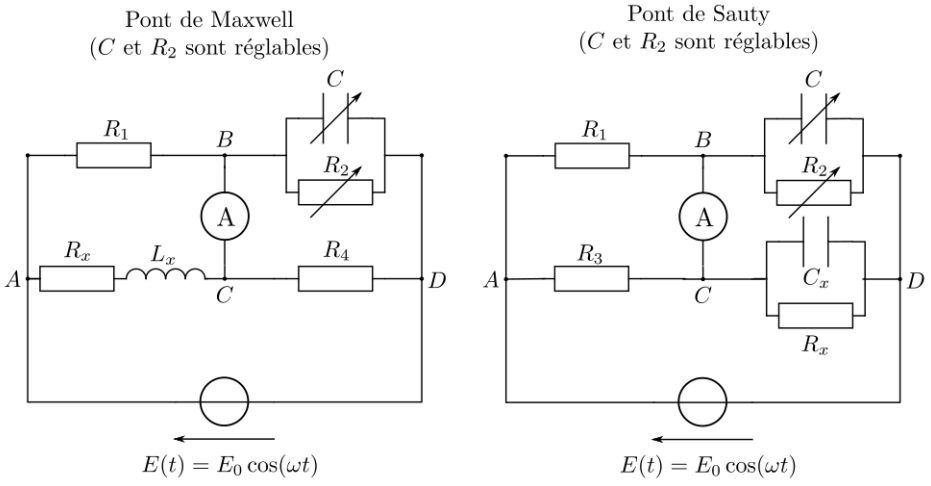
   (b) On suppose que i_g est suffisamment faible pour pouvoir tout de même appliquer la formule du pont diviseur de tension[1]. Exprimer $\underline{U_{BD}}$ et $\underline{U_{CD}}$ en fonction des quatre impédances et de E.

   (c) En déduire l'expression de $\underline{i_g}$ en fonction de E, R_g et des quatre impédances. Retrouve-t-on la condition d'équilibre du pont de la question 4.(b) ?

Dans toute la suite de cet exercice, pour gagner en clarté, on notera avec un indice x (R_x, L_x, C_x...) les grandeurs des composants inconnus que l'on souhaite mesurer. De plus, certains composants ont une valeur "réglable" lors de la mesure : on les représente en les barrant d'une flèche diagonale.

On considère les deux montages suivants.

[1] Le calcul sans cette hypothèse fait appel à une identification de générateur de Thévenin un peu tordue...mettons-là de côté pour ce DS.



6. **Mesure de bobine : le pont de Maxwell**. On cherche à déterminer les caractéristiques de la bobine inconnue, de qualité médiocre : sa résistance interne R_x ne peut être négligée. Exprimer R_x et L_x en fonction des caractéristiques connues des différents composants. Comment effectuer la mesure de ces deux grandeurs à l'aide des composants "réglables" ?
7. **Mesure de condensateur : le pont de Sauty.** On cherche à déterminer la capacité C_x et la résistance de fuite R_x d'un condensateur. On utilise pour cela le pont de Sauty. Exprimer C_x et R_x en fonction des autres grandeurs, et expliquer comment réaliser la mesure.
8. **Capteur de luminosité.** On souhaite réaliser un capteur de luminosité à l'aide d'une *photorésistance.* Elle se comporte comme un résistor, dont la résistance R_p dépend de la puissance lumineuse reçue Φ par une relation de la forme
$$R_p = \alpha \Phi^{-k}$$
avec α et k des constantes.
   (a) Proposer un circuit permettant de mesurer la valeur de R_p, utilisant une résistance variable.
   (b) La relation $R_p(\Phi)$ n'est pas linéaire. Pour obtenir une droite à partir des mesures effectuées de R_p en fonction de Φ, que doit-on placer en abscisse et en ordonnée du graphique ? Comment *étalonner*, c'est-à-dire récupérer les valeurs expérimentales de α et k ?

Exercice 3 - Effet de cave

L'analogie thermodynamique-électrocinétique que nous avions utilisée dans le DM 3 ne s'applique pas seulement au chauffage d'une habitation : on peut étudier l'évolution de la température à l'intérieur d'une cave souterraine tout au long de l'année. L'isolation de la cave par le sol est représentée par une résistance thermique R_{th}, et la capacité thermique de la cave par le condensateur de capacité C_{th}.

Aucune notion de thermodynamique n'est nécessaire pour traiter ce problème ! Tout est strictement équivalent à l'étude d'un circuit électrique, a condition de faire les substitutions du tableau ci-dessous, qui répertorie également les unités dans lesquelles on exprime les grandeurs thermiques.

Grandeur thermique	Unité	Grandeur électrique associée
Température T	Kelvin K ou degré Celsius °C	Potentiel électrique V
Différence de température θ	Kelvin K ou degré Celsius °C	Tension électrique u
Flux thermique Φ	Watt W	Intensité du courant i
Résistance thermique R_{th}	Kelvin par Watt $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$	Résistance électrique R
Capacité thermique C_{th}	Joule par Kelvin $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	Capacité C

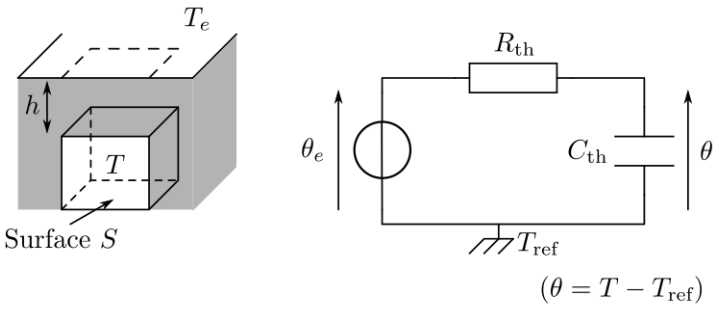
On rappelle la correspondance degré Celsius-Kelvin : $T(°\mathrm{C}) = T(\mathrm{K}) - 273,15$.

Données :

- La cave a une surface au sol $S = 20\,\mathrm{m}^2$, et sa capacité thermique est de l'ordre de $C_{\text{th}} = 5{,}0\,\mathrm{MJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.
- La résistance thermique R_{th} du sol entre la surface et la cave dépend de la surface S, de la profondeur h de la cave et d'une grandeur appelé *conductivité thermique* λ suivant la formule :

$$R_{\text{th}} = \frac{h}{\lambda S}$$

Pour un sol sec typique, $\lambda = 3{,}2\cdot 10^{-1}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.



On souhaite étudier les variations quotidiennes de température à l'intérieur de la cave. On tient donc compte des variations de température au cours de la journée. Pour simplifier, on suppose que

$$T_e(t) = T_{\text{ref}} + A\cos(\omega t)$$

avec T_{ref} la température moyenne, qui sert de référence, $A > 0$ l'amplitude de variation de température et ω la pulsation associée aux fluctuations quotidiennes de température, dont la période est donc égale à $24\,\mathrm{h}$. Pour simplifier les calculs, on exprimera les températures par rapport à T_{ref}, ce qui revient à raisonner en termes de $\theta = T - T_{\text{ref}}$.

1. Relier ω à la durée d'un jour, et calculer sa valeur numérique.
2. Justifier que la notation complexe est adaptée à ce problème. On définit $\underline{\theta}(t)$ tel que $\theta(t) = \mathrm{Re}(\underline{\theta}(t))$. A partir du circuit, exprimer $\underline{\theta}(t)$ en fonction de A, ω, R_{th} et C_{th}.
3. Définir une pulsation caractéristique ω_0, et exprimer $\theta_0 = |\underline{\theta}(t)|$ en fonction de A, ω et ω_0.
4. Pour que la température dans la cave puisse varier de manière substantielle, la température extérieure doit-elle varier lentement ou rapidement ? Justifier, en précisant la nature (*passe-...*) du "filtre" que constitué ce circuit.
5. On souhaite que la température dans la cave varie de moins de $A/10$ au cours de la journée. Déterminer la valeur de h minimale nécessaire pour satisfaire à cette contrainte : est-ce que cela vous parait cohérent avec la réalité ? Quelles denrées alimentaires stocke-t-on souvent dans des caves pour exploiter cette propriété ?
6. Déterminer la valeur critique δ de h telle que $\omega_0 = \omega$. Que signifie physiquement δ ? Comment varie-t-elle avec la fréquence de variation de la température ? *Vous verrez en deuxième année que cette longueur caractéristique apparaît lorsqu'on modélise plus finement la diffusion thermique à l'intérieur du sol !*

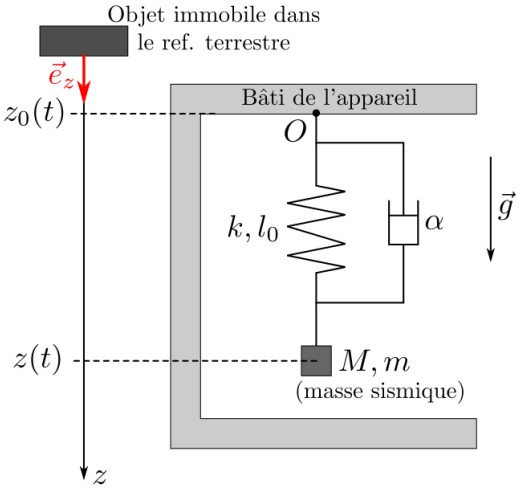
7. A la cour du roi Louis XIV, les membres de la cour pouvaient profiter, en plein été...de sorbets ! Les réfrigérateurs électriques n'ayant pas encore été inventés, on stockait dans de grandes caves souterraines, les *glacières*, des blocs de glace récupérées pendant l'hiver sur les étendues d'eau avoisinantes. Estimer la profondeur à laquelle se trouvait la cave, en supposant qu'elle aie les mêmes caractéristiques que celle du début de l'exercice.

La glacière du Petit Trianon, dans le parc du château.

Exercice 4 - Accéléromètre d'appareil photo

Les appareils photographiques reflex numériques, même ceux d'entrée de gamme, sont aujourd'hui équipés d'accéléromètres pour la stabilisation d'images. Cela permet, en particulier sur les longues focales, de stabiliser la visée. Il est alors plus facile de faire le point sur un sujet très lointain et il est plus aisé de soigner son cadrage, les tremblements du photographe étant amortis.

On se propose d'étudier le fonctionnement d'un accéléromètre à détection capacitive, ce système étant le plus répandu actuellement. Son principe est le suivant : une poutre suspendue appelée *masse sismique* constitue l'une des armatures d'un condensateur plan. L'autre armature est solidaire de l'appareil photographique dont on veut mesurer l'accélération. Les variations de capacité liées au déplacement de la masse sismique permettent de suivre son mouvement. On modélise la structure mécanique étudiée par une masse ponctuelle M de masse m, suspendue à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, dont l'autre extrémité est fixée en O au bâti solidaire de l' appareil photographique. L'axe (Oz) est descendant, et un objet immobile dans le référentiel terrestre (par exemple, le plafond) sert de référence des positions.



On s'intéresse à la détermination de l'amplitude Z_0 de la vibration engendrée par le tremblement de la main du photographe située au niveau du point O. On considère, pour cela, que le point O oscille verticalement avec une pulsation ω et une amplitude A, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ (que l'on supposera galiléen).
On repère la position de O par $z_0(t) = A\cos\omega t$. La position de la masse est repérée par $z(t)$ dans $\mathbb{R}$. Les amortissements sont modélisés par une force de frottement de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}_{M/\mathcal{A}} = -\alpha\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right)\vec{e}_z$$

avec $\vec{v}_{M/\mathcal{A}}$ la vitesse de M par rapport à l'appareil photo $\mathcal{A}$.

1. Exprimer la longueur du ressort en fonction de $z(t)$ et de $z_0(t)$.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse M dans le référentiel $\mathcal{R}$. *On soignera la rédaction de l'étude mécanique !*
3. En l'absence du mouvement du photographe (c'est-à-dire $z_0(t) = 0$ étant constant), quelle est la longueur d'équilibre $l_{eq} = z_{eq}$ du ressort ? On l'exprimera en fonction de l_0, m, g et k.
4. On pose $\zeta(t) = z(t) - z_0(t) - z_{eq}$. Montrer que :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\zeta}{dt} + \omega_0^2\zeta = A\omega^2\cos(\omega t)$$

On précisera les expressions de ω_0 et Q en fonction de m, k et α, leurs dimensions et le nom qu'on leur donne habituellement.

On s'intéresse désormais au mouvement en régime établi de la masse. On cherche ζ sous forme sinusoïdale, et lui associe la notation complexe :

$$\zeta(t) = \zeta_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad \longrightarrow \qquad \underline{\zeta}(t) = \underline{\zeta} e^{j\omega t} = \zeta_0 e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}$$

avec $\zeta_0 > 0$.

5. Ecrire l'équation de la question 4 en notation complexe, et déterminer l'expression de $\underline{\zeta}$.
6. On pose la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$. Montrer que :

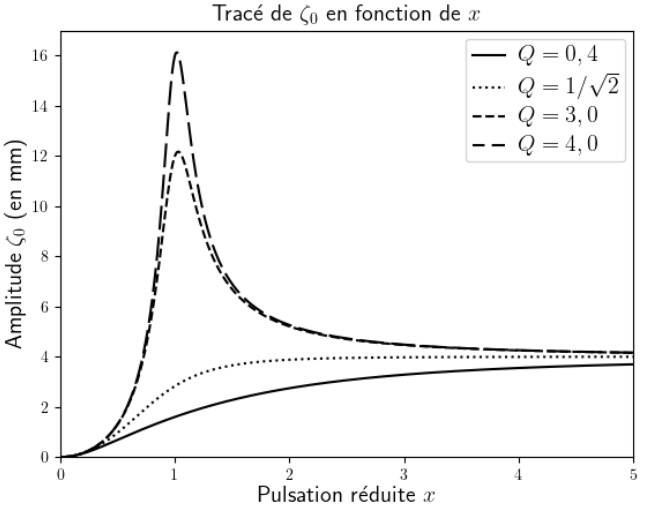
$$\zeta_0 = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}}}$$

7. Etudier ζ_0 dans les limites basse/haute fréquence. Justifier que le système mécanique se comporte comme un filtre, dont on qualifiera la nature (passe-haut, bas, bande, ou coupe bande).
8. A quelle condition sur ζ_0 peut-on observer une résonance ? En déduire une condition sur Q pour que le système puisse entrer en résonance.
9. Démontrer, en étudiant ζ_0, que le phénomène de résonance se produit si $\omega = \omega_r$, avec :

$$\omega_r = \omega_0 Q \sqrt{\frac{2}{2Q^2 - 1}}$$

10. Que devient ω_r si $Q >> 1$?
11. Le graphique ci-contre représente ζ_0 pour différentes valeurs de Q, avec $A = 4\,\text{mm}$. On suppose que le phénomène de résonance se produit pour $\omega_r \simeq \omega_0$ peu importe la valeur de Q, tant qui'il est supérieur à $1/\sqrt{2}$. Un bon accéléromètre doit être capable de détecter l'amplitude A des tremblements de la main du photographe sur la plus grande plage de fréquence possible.

    Comment faut-il choisir la pulsation propre du système et son facteur de qualité ? Proposer des valeurs de α et k qui conviendraient, sachant que $m = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{g}$, et que k est forcément supérieur à $10^3\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.



Bonus - Physique "de coin de table"

A ne faire qu'à la fin du DS, ou après : cette question ne rapporte pas de point !

Lorsqu'on marche dans la salle des professeurs du lycée, parfois, la baie vitrée (rectangulaire, d'environ trois mètres de haut et cinq de large) se met à osciller à une fréquence assez faible à cause des vibrations "sismiques" causées par la marche. Estimer un ordre de grandeur de cette fréquence, puis l'ordre de grandeur de la "raideur" de la vitre, si on la modélise comme un système masse-ressort oscillant (la force de rappel serait la force qui maintient la vitre en place à la verticale).