Devoir Surveillé 3 - Corrigé

Question de cours

Voir...le cours !

Exercice 1 - Génération de champs magnétiques intenses : le projet Megagauss

1. La loi des mailles s'écrit :
$$E - u_R - u_C = 0$$
avec u_R et u_C en convention récepteur et E en convention générateur. Si on note i l'intensité électrique fournie par le générateur, et i_k l'intensité circulant dans le condensateur k ($k \in [\![1; n]\!]$), alors
$$i = \sum_{k=1}^{n} i_k$$
De plus, la loi des condensateurs appliqué à chacun d'entre eux donne
$$i_k = C_k \frac{du_C}{dt}$$
Tous les condensateurs ayant la même capacité $C_k = C$, on en déduit que
$$i = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k\right) \frac{du_C}{dt} = nC\frac{du_C}{dt}$$
En remplaçant dans la loi des mailles $u_R = Ri$, on obtient
$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{nRC}u_C = \frac{E}{nRC}$$
Que l'on peut réécrire
$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau} \quad ; \quad \tau = nRC}$$
2. Si on compare l'équation différentielle avec celle du circuit RC série simple, on remarque que le temps caractéristique s'écrit $\tau = RC_{\text{eq}}$, avec $C_{\text{eq}} = nC$: les n condensateurs branchés en parallèle sont donc équivalent à un unique condensateur de capacité nC.
3. On résout d'abord l'équation homogène :
$$u_{C,\mathcal{H}}(t) = \lambda e^{-t/\tau}$$
avec λ une constante que l'on déterminera avec les conditions initiales. Il reste à ajouter une solution particulière : le second membre étant constant, on cherche $u_{C,p}$ constante (donc de dérivée nulle), de sorte que
$$\frac{1}{\tau}u_{C,p} = \frac{E}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad u_{C,p} = E$$
Ainsi,
$$u_C(t) = u_{C,\mathcal{H}}(t) + u_{C,p} = \lambda e^{-t/\tau} + E$$
Le condensateur étant déchargé pour $t < 0$, et la tension u_C étant continue, la condition initiale s'écrit $u_C(t = 0^+) = 0$, et donc
$$\lambda + E = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -E$$

Et finalement

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

La charge dure environ $5\tau = 5nRC$: mieux vaut choisir une faible valeur de R pour que la charge soit la plus rapide possible.

4. L'énergie fournie par le générateur peut s'exprimer sous forme intégrale :

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty \mathcal{P}_G(t)\,dt = \int_0^\infty Ei(t)\,dt$$

On peut calculer $i_(t)$ à partir de la relation du condensateur :

$$i(t) = nC\frac{du_C}{dt} = \frac{nCE}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}\,dt = \frac{E^2}{R}\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty \frac{E^2\tau}{R}\left(-0 + e^{-0}\right) = \frac{E^2\tau}{R}$$

D'où, en remplaçant τ par son expression :

$$\boxed{\mathcal{E}_G = nCE^2 = 1{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}$$

L'énergie fournie ne dépend pas de la valeur de la résistance : si celle-ci est plus grande, les pertes par effet Joule augmente, mais en même temps l'intensité i diminue, ce qui atténue l'effet Joule. Ces deux effets se compensent parfaitement. On peut donc choisir R comme on le souhaite, du point de vue de la dépense énergétique (et donc on peut la choisir aussi faible que possible pour minimiser le temps de charge).

5. Dans l'ARQS, on néglige le temps de propagation des ondes électromagnétiques, qui établissent les tensions et intensités en tout point du circuit. Il faut impérativement se trouver dans ces conditions pour pouvoir décrire le circuit avec les lois de l'électrocinétique que nous avons apprises. Cela implique que le temps de propagation des ondes électromagnétiques, $t_p \sim l/c$ (avec c la célérité de la lumière dans le vide) est très faible devant les temps de variation des grandeurs électriques : ici, τ. On peut donc écrire

$$t_p << \tau = nRC \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R >> \frac{l}{nCc}}$$

Pour être dans ces conditions, on peut choisir par exemple

$$\boxed{R_{\text{min}} \sim 1000\frac{l}{nCc} = 27\,\mathrm{m\Omega}}$$

(Le choix du facteur 1000 est un peu arbitraire : tout nombre suffisamment grand est accepté dans la réponse. Il faut de toute façon faire l'expérience pour s'assurer qu'on est dans les conditions de l'ARQS)

6. Le condensateur étant totalement charge à cette nouvelle origine des temps, $\boxed{u_C(t=0) = E}$ avec la question 3.

7. L'interrupteur étant en position (2), on ne regarde que la maille de droite. La loi des mailles s'écrit, en mettant le condensateur en convention générateur (on a pas le choix si on souhaite conserver la notation u_C des questions précédentes), r et L en convention récepteur :

$$-u_C + u_r + u_L = 0$$

On peut aussi écrire les lois des composants, en faisant attention au signe $-$ pour u_C qui est en **convention générateur !**

$$i = -nC\frac{du_C}{dt} \quad ; \quad u_r = ri \quad ; \quad u_L = L\frac{di}{dt}$$

On voit alors qu'il faut dériver la loi des mailles pour faire apparaître $\frac{du_C}{dt}$:

$$-\frac{du_C}{dt} + \frac{du_r}{dt} + \frac{du_L}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{nC}i + r\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} = 0$$

On divise alors par L, et on obtient

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LnC}i = 0$$

Reste alors à poser

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LnC}} \quad ; \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L} \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{nC}}}$$

pour obtenir l'équation canonique de l'énoncé. ω_0 est la pulsation propre du circuit, en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, Q le facteur de qualité, sans dimension. Les applications numériques donnent

$$\boxed{\omega_0 = 9{,}1\cdot 10^5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \quad ; \quad Q = 0,91}$$

8. L'équation caractéristique s'écrit, en notant x la variable associée (pour éviter de confondre avec r ici !)

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant s'écrit

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

Comme $Q = 0,91$, $4Q^2 = 3,3 > 1$ donc $\boxed{\Delta < 0}$: les racines de l'équation caractéristique seront complexes, et le circuit aura donc un comportement pseudo-périodique.

9. Les deux racines de l'équation caractéristique s'écrivent, avec un peu d'esthétisme (voir le chapitre E_4) :

$$x_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\Omega$$

avec $\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$. La solution de l'équation différentielle s'écrit alors, en choisissant la forme avec un seul cosinus :

$$i(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda e^{i\Omega t} + \mu e^{-i\Omega t}\right) = Ce^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right)$$

L'équation différentielle n'ayant pas de second membre, cette forme de $i(t)$ est suffisante. Reste à déterminer les constantes C et φ avec les conditions initiales $u_C(0) = E$ et $i(0) = 0$ (l'intensité étant continue dans la bobine). On déduit de la loi des mailles à $t = 0$:

$$-u_C(0) + u_L(0) + u_r(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E + L\frac{di}{dt}(0) + ri(0) = 0$$

et donc $\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$. On a également besoin de la dérivée de $i(t)$:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q}Ce^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\Omega t + \varphi) - Ce^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\Omega\sin(\Omega t + \varphi)$$

Les deux conditions initiales donnent donc :

$$\begin{cases} 0 & = C\cos\varphi \\ \dfrac{E}{L} & = -\dfrac{C\omega_0}{2Q}\cos(\varphi) - C\Omega\sin(\varphi) \end{cases}$$

La première équation donne $\cos\varphi = 0$ car $C = 0$ ne correspond pas à une solution physiquement acceptable (il ne se passerait rien dans le circuit, alors que le condensateur est censé se décharger...). On peut donc choisir $\varphi = +\pi/2$ (ou $-\pi/2$, peu importe car les signes se compenseront à la fin). On remplace alors dans l'autre équation :

$$\frac{E}{L} = -C\Omega\sin(\pi/2) = C\Omega \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{-E}{L\Omega}$$

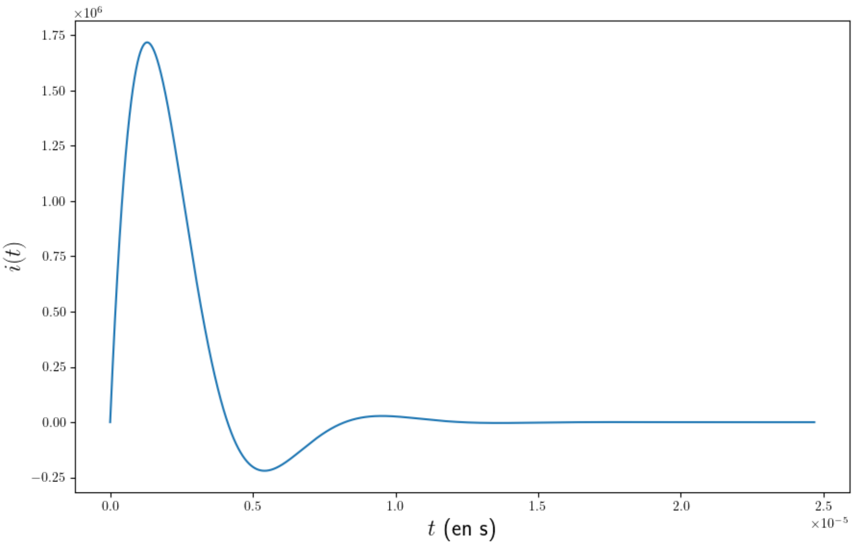
On peut alors remplacer φ et C dans l'expression de $i(t)$:

$$i(t) = -\frac{E}{L\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Et enfin, en utilisant le fait que $\cos(x + \pi/2) = -\sin(\pi/2)$:

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{L\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\Omega t)}$$

10. Voir le graphique ci-dessous. On voit bien la position des maximum/minimum successifs de $i(t)$: c'est à ces endroits que $\dfrac{di}{dt}$ s'annule.



11. Il faut calculer la dérivée de i :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{E\omega_0}{2QL\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\Omega t) + \frac{E}{L\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\Omega\cos(\Omega t)$$

puis écrire que cette dérivée s'annule en $t = T$:

$$-\frac{E\omega_0}{2QL\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}\sin(\Omega T) + \frac{E}{L\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}\Omega\cos(\Omega T) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{E\omega_0}{2QL\Omega} = \frac{E}{L}\cos(\Omega T)$$

On peut alors isoler T dans le membre de gauche en utilisant le fait que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\tan(\Omega T) = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}$$

Enfin, on peut utiliser le fait que $\Omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$

$$\boxed{\tan(\Omega T) = \sqrt{4Q^2-1}}$$

12. La valeur la plus grande de i est atteinte pour le premier maximum de la fonction $i(t)$, qui est également le premier point d'annulation de sa dérivée. On prend donc la plus petite valeur de T solution de l'équation précédente, c'est-à-dire

$$\boxed{T_{\text{max}} = \frac{1}{\Omega}\arctan\left(\sqrt{4Q^2-1}\right) = \frac{2Q}{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}\arctan\left(\sqrt{4Q^2-1}\right)}$$

Numériquement, $\boxed{T_{\text{max}} = 4{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{s}}$ et $\boxed{i_{\text{max}} = 1{,}7 \cdot 10^{6}\,\text{A}}$. Cette intensité est extrêmement élevée !

13. On applique la formule donnée par l'énoncé :

$$\boxed{B_{\text{max}} = \frac{\mu_0 i_{\text{max}}}{D} = 106\,\text{T}}$$

Ce champ est extrêmement intense, près de trois fois supérieur au champ statique le plus intense jamais créé en laboratoire !

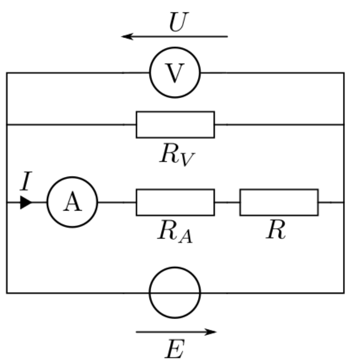
14. L'amplitude de i décroit avec le temps de relaxation $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ (le terme en $e^{-t/\tau}$ dans l'expression de $i(t)$). Après environ 5τ, i est quasiment nul à chaque instant, et donc B aussi. La durée de vie t_B du champ magnétique est donc

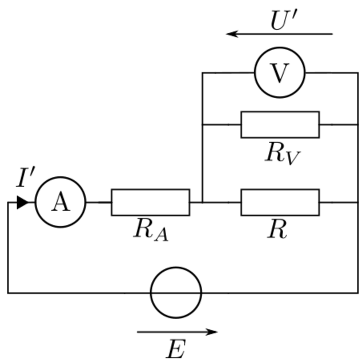
$$\boxed{t_B \simeq 5\tau = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{s}}$$

ce qui est très court : le champ magnétique est intense, mais n'existe que pendant quelques microsecondes. C'est toutefois suffisant pour plein d'applications scientifiques !

Exercice 2 - Montages courte et longue dérivation

1. Avec la loi d'Ohm, $\boxed{R = \dfrac{U}{I}}$. Les résistances internes du voltmètre et de l'ampèremètre vont changer la valeur de U ou I aux bornes de R par rapport à la situation des appareils idéaux, et donc les valeurs qu'ils afficheront. Une partie du courant I ira dans R_V, et une partie de la tension U se trouvera aux bornes de R_A.
2. Voir les schémas ci-dessous.





3. Le montage 2 est adapté à la mesure de U : il ne mesure que la tension aux bornes de R, et non aux bornes de l'ensemble résistor/ampèremètre (alors que dans le montage 1, le voltmètre mesure E, et non la tension aux bornes de R qui est légèrement plus faible).

   Le montage 1 est, à l'inverse, adapté à la mesure de I : l'intensité traversant l'ampèremètre est la même que celle qui traverse R (alors que dans le montage 2, c'est $I - I_{\text{voltmètre}}$ qui traverse R).

4. (a) En associant R et R_A en série :

$$U = (R + R_A)I \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R_{\text{ld}} = \frac{U}{I} = R + R_A}$$

   (b) Avec la définition,

$$\boxed{\varepsilon_{\text{ld}} = \frac{|R_{ld} - R|}{R} = \frac{R_A}{R}}$$

   L'application numérique donne

$$\begin{cases} \varepsilon_{\text{ld}}(R = 100\,\Omega) & = 1,0 \cdot 10^{-1} \\ \varepsilon_{\text{ld}}(R = 100\,\text{M}\Omega) & = 1,0 \cdot 10^{-7} \end{cases}$$

   On voit alors que le montage longue dérivation donne une valeur de résistance plus fidèle à la réalité lorsqu'il mesure une *forte résistance* (l'erreur relative étant très faible).

5. (a) On associe les résistances R et R_V en parallèle pour obtenir la résistance R_{cd} "vue par le voltmètre"

$$\boxed{R_{\text{cd}} = \frac{U'}{I'} = \frac{RR_V}{R + R_V}}$$

   (b) Avec à nouveau la définition de l'écart relatif,

$$\varepsilon_{\text{cd}} = \left| \frac{1}{R} \left(\frac{RR_V}{R + R_V} - R \right) \right| = \frac{R_V}{R + R_V} - 1$$

   D'où, en mettant au même dénominateur,

$$\boxed{\varepsilon_{\text{cd}} = \frac{R}{R + R_V}}$$

   L'application numérique donne

$$\begin{cases} \varepsilon_{\text{cd}}(R = 100\,\Omega) & = 1,0 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{\text{cd}}(R = 100\,\text{M}\Omega) & = 1,0 \end{cases}$$

   On voit alors que le montage courte dérivation donne une valeur de résistance plus fidèle à la réalité lorsqu'il mesure une *faible résistance*.

6. On cherche les valeurs de R pour lesquelles

$$\varepsilon_{\text{cd}} = \varepsilon_{\text{ld}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{R}{R + R_V} = \frac{R_A}{R} \quad \Longleftrightarrow R^2 - R_A R - R_A R_V = 0$$

   C'est une équation polynômiale du second degré, dont le discriminant est

$$\Delta = R_A^2 + 4R_A R_V > 0$$

   L'équation admet donc deux racines réelles

$$R_{\pm} = \frac{1}{2} \left(R_A \pm \sqrt{R_A^2 + 4R_A R_V} \right) = \frac{R_A}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4R_V}{R_A}} \right)$$

Or, la racine carrée est nécessairement plus grande que 1 car $R_V/R_A > 0$, donc $R_- < 0$. Ce n'est pas une solution physiquement acceptable, une résistance devant être positive. On en déduit que l'unique valeur R_0 de la résistance pour laquelle les montages sont équivalents est

$$\boxed{R_0 = R_+ = \frac{R_A}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_V}{R_A}}\right) = 3{,}2\,\mathrm{k}\Omega}$$

7. - **Si** $R < R_0$ **:** $\varepsilon_{\text{cd}} < \varepsilon_{\text{ld}}$, dont il faut mieux choisir le montage courte dérivation.
   - **Si** $R > R_0$ **:** $\varepsilon_{\text{cd}} > \varepsilon_{\text{ld}}$, dont il faut mieux choisir le montage longue dérivation.

Problème - Mesure de la viscosité d'un liquide

Partie 1 - Généralités sur les billes immergées dans un fluide visqueux

1. $\boxed{[\eta] = \dfrac{[f]}{[a][v]} = MLT^{-2} \cdot L^{-2} \cdot T = ML^{-1}T^{-1}}$. C'est une force par unité de surface et par seconde, son unité SI est donc le $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1} {\cdot} \mathrm{m}^{-1}$.
2. La seule formule homogène est $\boxed{V = \dfrac{4\pi}{3}a^3}$. On en déduit la masse de la bille avec la formule habituelle

$$\boxed{m = \rho V = \frac{4\pi\rho a^3}{3}}$$

3. Le poids apparent est défini comme

$$\vec{P}_{\text{app}} = \vec{P} + \vec{\Pi} = m\vec{g} - \rho_f V \vec{g}$$

En remplaçant $m = \rho V$, et le volume de la bille par son expression, on obtient

$$\boxed{\vec{P}_{\text{app}} = \frac{4\pi a^3}{3}(\rho - \rho_f)\vec{g}}$$

4. La bille étant soumise seulement à son poids apparent $\vec{P}_{\text{app}}$ et à la force de frottements, qui s'oppose quoi qu'il arrive à la vitesse, on peut affirmer qu'elle coule si son poids apparent est dirigé vers le bas. $\vec{g}$ étant orienté vers le bas, il faut donc que

$$\frac{4\pi a^3}{3}(\rho - \rho_f) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho > \rho_f}$$

La bille coule au fond du récipient si sa masse volumique est plus élevée que celle de fluide. C'est un résultat dont on fait quotidiennement l'expérience ! L'énoncé indique que dans la suite, $\rho > \rho_f$: on sera donc toujours dans la situation où la bille tend à couler au fond du récipient, et non à flotter.

Partie 2 - Vitesse limite d'une bille immergée dans un fluide

5. **Système :** bille, étudiée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Sur cette bille s'exercent les forces suivantes :
   - Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = \dfrac{4\pi\rho a^3}{3}\vec{g}$
   - La poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g} = -\frac{4\pi\rho_f a^3}{3}\vec{g}$

- La force de frottements fluides $\vec{f} = -6\pi\eta a\vec{v}$.

(On pourrait remplacer le poids et la poussée d'Archimède par le seul poids apparent, en utilisant la question 3).

6. La seconde loi de Newton s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4\pi\rho a^3}{3}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4\pi\rho a^3}{3}\vec{g} - \frac{4\pi\rho_f a^3}{3}\vec{g} - 6\pi\eta a\vec{v}$$

Le mouvement se déroulant seulement suivant le vecteur $\vec{e}_z$, on peut projeter la relation et remplacer $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$ ainsi que $\vec{g} = g\,\vec{e}_z$ (attention aux signes, l'axe est orienté vers le bas) :

$$\frac{4\pi\rho a^3}{3}\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi\rho a^3}{3}g - \frac{4\pi\rho_f a^3}{3}g - 6\pi\eta a v$$

Soit, en réarrangeant les termes :

$$\frac{4\pi\rho a^3}{3}\frac{dv}{dt} + 6\pi\eta a v = \frac{4\pi g a^3(\rho - \rho_f)}{3}$$

On met alors sous forme canonique en divisant par le terme devant dv/dt :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho a^2}v = \frac{g(\rho - \rho_f)}{\rho}$$

On identifie alors $\boxed{\tau = \frac{2\rho a^2}{9\eta}}$ et $\boxed{A = \frac{2a^2 g(\rho - \rho_f)}{9\eta}}$.

7. Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant. Nous l'avons déjà rencontré en étudiant le circuit RC soumis à un échelon de tension. On commence par écrire la solution de l'équation homogène associée,

$$(\mathcal{H}) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathcal{H}}(t) = \lambda e^{-t/\tau}$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre. Ici, on peut chercher une solution constante v_p, de sorte que

$$\frac{1}{\tau}v_p = \frac{A}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad v_p = A$$

et donc finalement

$$v(t) = \lambda e^{-t/\tau} + A$$

On cherche la valeur de λ avec la condition initiale $v(0) = 0$:

$$0 = \lambda + A \quad \longrightarrow \quad \lambda = -A$$

Ainsi,

$$\boxed{v(t) = A\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

8. On peut calculer facilement la limite :

$$\boxed{v_l = \lim_{t\to+\infty} v(t) = A = \frac{2a^2 g(\rho - \rho_f)}{9\eta}}$$

Remarque : c'est la valeur de v pour laquelle les trois forces se compensent, le vérifier par le calcul !

Cette vitesse limite est atteinte après un temps $\boxed{t_l \simeq 5\tau}$.

9. On fait l'application numérique, **en pensant bien à convertir en unités SI** $a = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ et $\rho = 7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$

$$\boxed{t_l \simeq \frac{10\rho a^2}{9\eta} \simeq 8\,\mathrm{s}}$$

Si la chute est bien plus longue que t_l, on peut négliger le régime transitoire et considérer que $v(t) \simeq v_l$ est constante. Ce n'est pas le cas pour cette bille dans ces conditions, mais ce le serait si on chutait dans un fluide plus visqueux (par exemple, $t_l \simeq 70\,\mathrm{ms}$ pour un fluide 100 fois plus visqueux comme la glycérine) ou si la bille était plus petite (par exemple $t_l \simeq 70\,\mathrm{ms}$ pour un grain de sable de $0{,}1\,\mathrm{mm}$ de rayon).

10. On simplifie le calcul en considérant qu'on atteint v_l très rapidement, comme le suggère l'énoncé :

$$\Delta t \simeq \frac{h}{v_l} \simeq \frac{9\eta h}{2a^2 g(\rho - \rho_f)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\eta = \frac{2a^2 g(\rho - \rho_f)\Delta t}{9h} = 0{,}75\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-2}}$$

ce qui est plus proche du glycérol, même si la valeur est éloignée. On peut vérifier la valeur de t_l *a posteriori* :

$$t_l = \frac{10\rho a^2}{9\eta} = 2{,}6\,\mathrm{s}$$

L'approximation est donc très discutable., et explique probablement l'écart avec la valeur réelle de la viscosité.
Remarque : on pourrait déterminer plus précisément la viscosité en intégrant v :

$$h = \int_0^{\Delta t} v(t)\,dt = v_l \left(\int_0^{\Delta t} dt - \int_0^{\Delta t} e^{-t/\tau}\,dt \right) = v_l \left(\Delta t + \tau e^{-\Delta t/\tau} - \tau \right)$$

Mais impossible sans calcul numérique, à cause de l'exponentielle.

Partie 3 - Mesure de viscosité avec un oscillateur amorti

11. Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, la bille subit :

- Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = \dfrac{4\pi\rho a^3}{3}\vec{g}$
- La poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g} = -\frac{4\pi\rho_f a^3}{3}\vec{g}$
- La force de frottements fluides $\vec{f} = -6\pi\eta a\vec{v}$.
- La force de rappel du ressort : $\vec{F_r} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$ (on vérifie le signe : si $z > l_0$, la force est dirigée par le haut car le ressort est allongé, donc suivant $-\vec{e}_z$).

12. La première loi de Newton permet de déterminer la position d'équilibre z_e.

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} + \vec{F_r} = \vec{0}$$

La vitesse de la bille étant nulle, $\vec{f} = \vec{0}$, et on remplace les autres forces par leurs expressions :

$$\frac{4\pi\rho a^3}{3}\vec{g} - \frac{4\pi\rho_f a^3}{3}\vec{g} - k(z_e - l_0)\vec{e}_z = \vec{0}$$

En projetant sur $\vec{e}_z$, on peut isoler z_e dans l'équation :

$$\boxed{z_e = l_0 + \frac{4\pi(\rho - \rho_f)a^3 g}{3k}}$$

On voit que la position d'équilibre du ressort est un peu plus basse que l_0, en raison du poids, mais un peu plus élevée qu'en l'absence de la poussée d'Archimède, qui contrebalance le poids.

13. Pour obtenir une équation différentielle sur z, on utilise la seconde loi de Newton :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} + \vec{F}_r = \vec{0}$$

Le mouvement étant unidimensionnel, on peut écrire $\vec{v} = \ddot{z}\,\vec{e}_z$, de sorte que

$$\frac{4\pi\rho a^3}{3}\ddot{z}\,\vec{e}_z = \frac{4\pi\rho a^3}{3}g\,\vec{e}_z - \frac{4\pi\rho_f a^3}{3}g\,\vec{e}_z - k(z-l_0)\vec{e}_z - 6\pi\eta a\dot{z}\,\vec{e}_z$$

On projette l'équation sur $\vec{e}_z$, puis on isole tous les termes en z à gauche, ce qui permet de reconnaître z_e dans le membre de droite :

$$m\ddot{z} + 6\pi\eta a\dot{z} + kz = kl_0 + \frac{4\pi(\rho-\rho_f)ga^3}{3} = kz_e$$

Pour mettre l'équation sous forme canonique, il reste à diviser par m :

$$\ddot{z} + \frac{6\pi\eta a}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

On pose alors $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et

$$2\zeta\omega_0 = \frac{6\pi\eta a}{m} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\zeta = \frac{3\pi\eta a}{\sqrt{km}}}$$

pour obtenir l'équation $(\mathcal{E})$.

14. L'équation homogène associée est

$$\boxed{(\mathcal{H}) \quad \frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 = 0}$$

On obtient facilement l'équation caractéristique, en dérivant deux fois e^{rt} :

$$\boxed{(E.C.) \quad r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0}$$

15. $\boxed{\Delta = 4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\zeta^2-1)}$. On peut donc distinguer trois situations :

- $\zeta > 1$: $\Delta > 0$, les racines de $(E.C.)$ sont réelles, et le régime est *apériodique*.
- $\zeta < 1$: $\Delta < 0$, les racines de $(E.C.)$ sont complexes, et le régime est *pseudo-périodique*.
- $\zeta = 1$: $\Delta = 0$, $(E.C.)$ admet une racine réelle double, et le régime est *critique*.

16. **Mesure de la viscosité de l'eau.**

(a) Le régime est pseudo-périodique car on observe des oscillations, donc $\boxed{\zeta < 1}$.

(b) Les deux racines de $(E.C.)$ s'écrivent

$$r_\pm = \frac{-\zeta\omega_0 \pm i\sqrt{4\omega_0^2(1-\zeta^2)}}{2} = -\omega_0\zeta \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

et la solution de l'équation homogène s'écrit alors, en choisissant la forme $A\cos + B\sin$:

$$z_{\mathcal{H}}(t) = e^{-\omega_0\zeta t}\left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right]$$

A cette solution, on ajoute une solution particulière $z = z_e$ de l'équation complète, et donc

$$\boxed{z(t) = z_e + e^{-\omega_0\zeta t}\left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right]}$$

(c) On applique les conditions initiales $z(0) = Z + z_e$ et $\dot{z}(0) = 0$. On calcule $\dot{z}$, en posant $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ pour simplifier les calculs :

$$\frac{dz}{dt} = -\omega_0\zeta e^{-\omega_0\zeta t}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + e^{-\omega_0\zeta t}\Omega\left[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right]$$

Les deux conditions initiales donnent alors

$$\left\{\begin{array}{ll} Z + z_e & = z_e + A \\ 0 & = -\omega_0\zeta A + B\Omega \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{ll} A & = Z \\ B & = \dfrac{\omega_0\zeta}{\Omega}Z = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}Z \end{array}\right.$$

Finalement,

$$\boxed{z(t) = z_e + Ze^{-\omega_0\zeta t}\left[\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right]}$$

(d) $\tau = \dfrac{1}{\omega_0\zeta}$ est le temps de relaxation : les pseudo-oscillations s'arrêtent après environ 5τ. On peut donc mesurer 5τ sur le graphique du bas : c'est le temps caractéristique de décroissance de l'enveloppe exponentielle. On peut soit évaluer 5τ avec l'arrêt approximatif des oscillations, soit utiliser la tangente à la courbe en 0, qui croise l'axe des abscisses en $t = \tau$. Peu importe la méthode choisie, on trouve $\boxed{\tau \simeq 30\,\mathrm{s}}$. On en déduit

$$\boxed{\zeta = \frac{1}{\omega_0\tau} = \sqrt{\frac{m}{k\tau^2}} = 4,4\cdot 10^{-4}}$$

ζ est très faible, ce qui explique le grand nombre d'oscillations. *Remarque : si on travaillait avec le facteur de qualité,* $Q = \dfrac{1}{2\zeta} = 1136$.

(e) On en déduit finalement la viscosité de l'eau à partir de l'expression de ζ :

$$\boxed{\eta_e = \frac{\zeta\sqrt{km}}{3\pi a} = 1{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}}$$

17. **Mesure de la viscosité d'un miel.**

(a) On est cette fois-ci en régime apériodique ($\zeta > 1$).

(b) Les racines de l'équation caractéristique s'écrivent cette fois-ci

$$r_\pm = \omega_0\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)$$

La solution de l'équation s'écrit donc (sans oublier d'ajouter z_e, la solution particulière)

$$\boxed{z(t) = z_e + \lambda\exp\left(\left[-\omega_0\zeta + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]t\right) + \mu\exp\left(\left[-\omega_0\zeta - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]t\right)}$$

(c) Les conditions initiales sont les mêmes qu'à la question 16.c, il faut cependant recalculer $\dot{z}$:

$$\begin{aligned}\dot{z} = \lambda\left[-\omega_0\zeta + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right] & \exp\left(\left[-\omega_0\zeta + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]t\right) \\ & +\mu\left[-\omega_0\zeta - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]\exp\left(\left[-\omega_0\zeta - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]t\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne donc en $t=0$

$$\begin{aligned}\dot{z}(0) &= \lambda\left[-\omega_0\zeta+\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]+\mu\left[-\omega_0\zeta-\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]\\ &= -\zeta\omega_0(\lambda+\mu)+\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}(\lambda-\mu)\end{aligned}$$

En appliquant les conditions initiales, on a donc

$$\left\{\begin{array}{ll} Z+z_e &= z_e+\lambda+\mu \\ 0 &= -\zeta\omega_0(\lambda+\mu)+\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}(\lambda-\mu)\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{ll}\mu &= Z-\lambda \\ 0 &= -\zeta\omega_0 Z+\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}(2\lambda-Z)\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{ll}\lambda &= \dfrac{Z}{2}\left(1+\dfrac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\\[2ex] \mu &= \dfrac{Z}{2}\left(1-\dfrac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\end{array}\right.$$

Et enfin

$$\boxed{z(t)=z_e+\frac{Z}{2}\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)e^{\left[-\omega_0\zeta+\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]t}+\frac{Z}{2}\left(1-\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)e^{\left[-\omega_0\zeta-\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right]t}}$$

Remarque mathématique : Ce n'est pas demandé spécifiquement dans le sujet, mais on peut simplifier un peu les expressions. Pour cela, on factorise par $e^{-\omega_0\zeta t}$

$$\begin{aligned} z(t) &= z_e+\frac{Z}{2}e^{-\omega_0\zeta t}\left[\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)e^{+\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}+\left(1-\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)e^{-\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}\right]\\ &= z_e+\frac{Z}{2}e^{-\omega_0\zeta t}\left[e^{+\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}+e^{-\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\left(e^{+\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}-e^{-\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\right]\end{aligned}$$

Et on identifie les fonctions trigonométriques hyperboliques !

$$\left\{\begin{array}{ll} e^{+\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}+e^{-\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}} &= 2\cosh\left(\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}\right)\\[2ex] e^{+\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}}-e^{-\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}} &= 2\sinh\left(\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}\right)\end{array}\right.$$

ce qui permet d'écrire $z(t)$ comme une forme très similaire à celle du régime pseudo-périodique, en substituant les fonctions trigonométriques circulaires par leurs analogues hyperboliques

$$\boxed{z(t)=z_e+Z\left[\cosh\left(\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}\right)+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\sinh\left(\omega_0 t\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]}$$

(d) On reconnaît deux évolutions exponentielles de temps caractéristiques

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll}\tau_1 &= \dfrac{1}{\zeta\omega_0-\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}}\\[2ex] \tau_2 &= \dfrac{1}{\zeta\omega_0+\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}}\end{array}\right.}$$

τ_1 est bien le plus long, car on divise par le facteur le plus petit à cause du signe $-$. On peut mettre τ_1 en forme pour faire apparaître un facteur de type $(1+\varepsilon)^\alpha$:

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0\zeta}\frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}} = \frac{1}{\omega_0\zeta}\frac{1}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{\zeta^2}}}$$

Or, comme $1/\zeta^2 << 1$, on peut écrire que

$$\sqrt{1-\frac{1}{\zeta^2}} = \left(1+\left[-\frac{1}{\zeta^2}\right]\right)^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2\zeta^2}$$

D'où, en remplaçant dans τ_1 :

$$\tau_1 \simeq \frac{1}{\omega_0\zeta}\frac{1}{1-1+\dfrac{1}{2\zeta^2}} \simeq \frac{1}{\omega_0\zeta}2\zeta^2 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\tau_1 \simeq \frac{2\zeta}{\omega_0}}$$

(e) On regarde la pente à l'origine sur la courbe : elle croise l'axe $z=0$ en $t=\tau_1$ (ou, alternativement, on estime 5τ avec l'arrêt du mouvement de la masse). On a alors $\boxed{\tau_1 = 6{,}3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}}$, dont on tire

$$\zeta = \frac{\omega_0\tau_1}{2} = 2,4$$

Enfin, on retrouve la viscosité avec la définition de ζ

$$\boxed{\eta_m = \frac{\zeta\sqrt{km}}{3\pi a} = 5{,}6\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}}$$

(f) On avait $\zeta = 2,6 > 1$ ce qui est déjà cohérent avec le comportement du système. C'est un peu "moins légitime" de dire $\zeta >> 1$, mais on remarque que

$$\frac{1}{\zeta^2} \simeq 0,14$$

ce qui est presque un ordre de grandeur plus petit que 1. L'approximation n'est pas non plus complètement aux fraises. On peut vérifier :

$$\sqrt{1-\frac{1}{\zeta^2}} = 0,92 \quad ; \quad 1-\frac{1}{2\zeta^2} = 0,85$$

ce qui est quand même assez proche.

Bonus popculture

C'est la Castafiore de Tintin ! $Q = 2500$, si elle réussit à chanter à la fréquence de résonance du verre, l'amplitude des oscillations sera particulièrement violente, et fera céder sans problème le matériau.

La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}} \simeq \omega_0$, donc la fréquence associée est

$$f_r = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 528\,\mathrm{Hz}$$

ce qui est une fréquence atteignable par la voix humaine (assez grave, d'ailleurs : c'est probablement en raison des valeurs approximatives choisies pour k et m).

Pour déterminer la "précision" en termes de fréquence que la Castafiore doit atteindre, on peut calculer la largeur du pic de résonance :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad\Longrightarrow\quad \Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_r}{Q} = 0{,}21\,\mathrm{Hz}$$

ce qui est très faible : il faut une sacrée précision dans la tonalité de la voix !