Devoir Surveillé 3

L'épreuve dure 4 heures. Le sujet est constitué de 8 pages, et comporte une question de cours, deux exercices et un problème. L'usage de la calculatrice est autorisé.

*Résoudre les exercices de ce sujet sur **copies doubles**. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements comptent pour une part importante de l'évaluation de la copie, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition, en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Question de cours (maximum 20 minutes !)

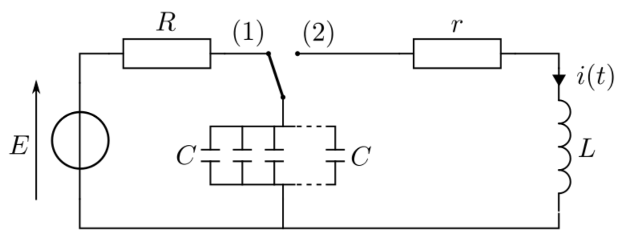
1. Démonter l'expression de $E_L(t)$, l'énergie magnétique stockée dans une bobine, en fonction de L et $i(t)$. On suppose que $E_L(t=0)=0$.
2. Rappeler les définitions suivantes (*avec des mots*) pour un oscillateur harmonique : période, fréquence, amplitude. Puis donner les relations entre la période et la fréquence, ainsi qu'entre la fréquence et la pulsation propre ω_0.
3. On considère le circuit LC série sans générateur de tension. Justifier rapidement pourquoi (quitte à choisir les conditions initiales comme on le veut) on peut écrire la tension aux bornes du condensateur comme
$$u_C(t) = U_0\cos(\omega_0 t)$$
Puis calculer les énergies $E_C(t)$ et $E_L(t)$ stockées dans le condensateur et la bobine, et démontrer que l'énergie totale est conservée.

Exercice 1 - Génération de champs magnétiques intenses : le projet Megagauss

Les champs magnétiques sont très importants pour la recherche et l'ingénierie : ils permettent d'étudier les propriétés des matériaux, de faire de la résonance magnétique nucléaire...En particulier, il est important de savoir créer des champs magnétiques intenses.

Dans ce problème, on étudie un dispositif de création de tels champs magnétiques, utilisé au laboratoire national des champs magnétiques intenses à Toulouse. Ce dispositif fonctionne en deux étapes :

- **Interrupteur en position** (1) **:** un générateur de tension continue $E = 30\,\mathrm{kV}$ une batterie de $n = 20$ condensateurs branchés en parallèle, chacun ayant une capacité $C = 6{,}0\,\mu\mathrm{F}$.
- **Interrupteur en position** (2) **:** Les condensateurs se déchargent brutalement dans une bobine plate, d'inductance $L = 10\,\mathrm{nH}$ et de résistance interne $r = 10\,\mathrm{m}\Omega$, que l'on modélise par une association en série de L et r.



Le courant i traversant la bobine crée un fort champ magnétique B, que l'on peut calculer par la formule

$$B = \frac{\mu_0 i}{D}$$

où $D = 20\,\mathrm{mm}$ est le diamètre de la bobine et $\mu_0 = 1{,}25\cdot 10^{-6}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$ la perméabilité magnétique du vide. B se mesure en Tesla T.

Dans un premier temps, on étudie la charge des condensateurs : l'interrupteur est en position (1).

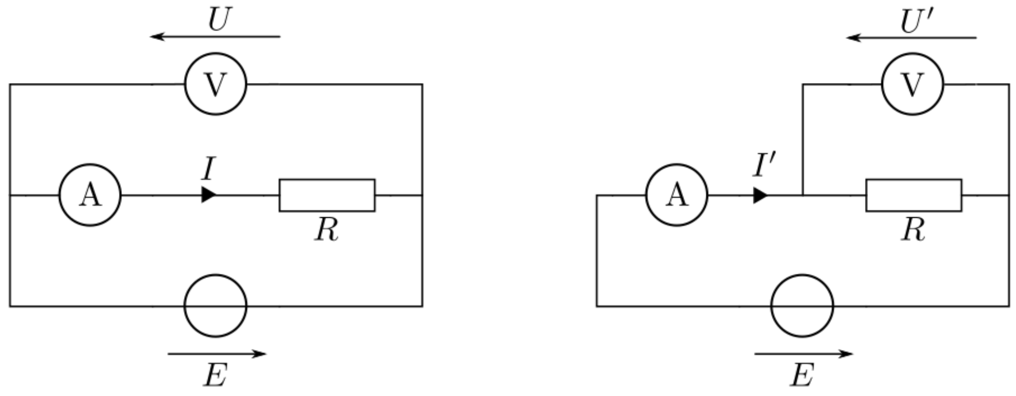
1. On note $u_C(t)$ la tension aux bornes d'un des condensateurs de la batterie. Déterminer l'équation différentielle dont u_C est solution, et introduire un temps caractéristique τ.
2. Justifier que la batterie de condensateurs se comporte en fait comme un unique condensateur de capacité $C_{\text{eq}} = nC$.
3. Déterminer la fonction $u_C(t)$, en supposant que les condensateurs sont déchargés quand $t < 0$ et qu'on allume le générateur à $t = 0$. Pour que la charge soit plus rapide, doit-on choisir une faible ou une forte valeur de R ?
4. Calculer l'énergie $\mathcal{E}_G$ fournie pendant la charge. Est-ce que la valeur de R influence la coût énergétique de la charge des condensateurs ?
5. Rappeler ce qu'est l'ARQS. Estimer une borne inférieure R_{min} pour la valeur de R telle que la charge du condensateur se produise dans le cadre de l'ARQS. On suppose que le circuit a une longueur $l = 1{,}0\,\text{m}$.

Une fois la batterie de condensateurs complètement chargée, on bascule l'interrupteur en position (2). Le générateur ne joue alors plus de rôle dans le circuit, et la batterie se décharge dans l'ensemble (r, L). On change l'origine des temps dans la suite de l'exercice : on choisit le nouveau $t = 0$ comme l'instant où l'interrupteur bascule.

6. Que vaut la tension $u_C(t = 0)$ au moment où l'interrupteur bascule ?
7. Démontrer que i est solution de
$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$
en introduisant des paramètres Q et ω_0 adéquats, dont on donnera le nom, et déterminera l'expression en fonction de r, L, C, la dimension et la valeur numérique.
8. Justifier que le circuit a un comportement *pseudo-périodique*.
9. Montrer que
$$i(t) = \frac{E}{L\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\Omega t)$$
en précisant l'expression de Ω en fonction de ω_0 et Q.
10. Tracer l'allure de la courbe de $i(t)$. Sur cette courbe, indiquer les points pour lesquels $\dfrac{di}{dt} = 0$.
11. Soit T un instant pour lequel $\dfrac{di}{dt}(T) = 0$. Démontrer que
$$\tan(\Omega T) = \sqrt{4Q^2 - 1}$$
12. A partir des deux questions précédentes, déterminer l'instant T_{max} à laquelle la valeur de l'intensité est maximale. On notera cette valeur i_{max}. Calculer les valeurs numériques de T_{max} et i_{max}.
13. En déduire la valeur maximale B_{max} du champ magnétique que ce système peut fournir. Comparer avec les ordres de grandeur suivants : $B \simeq 0,1T$ pour un aimant de frigo, $B \simeq 10\,\text{T}$ dans un IRM médical, $B \simeq 40\,\text{T}$ est le champ magnétique "permanent" le plus élevé créé en laboratoire.
14. Quelle est la "durée de vie" du champ magnétique B (c'est-à-dire la durée pendant laquelle le champ magnétique oscille avec une amplitude non négligeable) ?

Exercice 2 - Montages courte et longue dérivation

Pour mesurer la valeur R d'une résistance, on mesure la tension à ses bornes ainsi que l'intensité du courant qui la traverse. Il y a toutefois une petite subtilité : il y a deux "possibilités" pour brancher le voltmètre et l'ampèremètre, représentées sur le schéma électrique ci-dessous.



Montage 1 : "Longue dérivation" Montage 2 : "Courte dérivation"

Le but de l'exercice est de comprendre pourquoi ces deux montages ne sont pas équivalents.

> **Données : Ampèremètre et voltmètre réels.** On propose les modèles suivants pour l'ampèremètre et le voltmètre réels :
>
> - L'ampèremètre est en réalité associé à une résistance interne $R_A = 10\,\Omega$, en **série** avec lui.
> - Le voltmètre est en réalité associé à une résistance interne $R_V = 1{,}0\,\mathrm{M}\Omega$ en **parallèle** avec lui.

1. Comment déduire de la mesure de U et de I la valeur de R ? Pourquoi le caractère réel de l'ampèremètre et du voltmètre fait que les deux montages ne sont pas équivalents ?
2. Reproduire les schémas des montages 1 et 2 en remplaçant le voltmètre et l'ampèremètre par leurs modèles réels.
3. Quel montage est plus adapté pour mesurer l'intensité du courant qui parcourt R ? Même question pour mesurer la tension aux bornes de R ?
4. Etude du montage longue dérivation.
   (a) Calculer la résistance $R_{\text{ld}} = U/I$ mesurée dans le montage longue dérivation en fonction de R et de R_A.
   (b) En déduire l'écart relatif entre la valeur mesurée et la valeur attendue, défini par :
   $$\varepsilon_{\text{ld}} = \frac{|R_{\text{ld}} - R|}{R}$$
   Faire l'application numérique pour $R = 100\,\Omega$ et $R = 100\,\mathrm{M}\Omega$.
5. Etude du montage courte dérivation.
   (a) Calculer la résistance $R_{\text{cd}} = U'/I'$ mesurée dans le montage courte dérivation en fonction de R et de R_V.
   (b) En déduire l'écart relatif ε_{cd} entre la valeur mesurée et la valeur attendue. Faire l'application numérique pour $R = 100\,\Omega$ et $R = 100\,\mathrm{M}\Omega$.
6. Pour quelle valeur R_0 de R les deux montages sont-ils équivalents ?
7. Dans la pratique, comment choisir le montage adéquat en séance de TP ?

Problème - Mesure de la viscosité d'un liquide

La *viscosité* d'un fluide (plus rigoureusement, *viscosité dynamique*) est une grandeur physique importante pour leur étude : elle décrit leur "résistance à l'écoulement". Si on applique les mêmes forces à deux fluides pour les faire s'écouler, c'est celui de plus grande viscosité qui s'écoulera moins vite. La viscosité influence également le mouvement des solides dans les fluides : ce dernier sera plus fortement *freiné* dans un fluide de viscosité importante.

L'objectif de ce problème est de mesurer, de deux manières différentes, la viscosité d'un fluide en étudiant le mouvement d'une bille immergée à l'intérieur : en "laissant couler" la bille, puis en la faisant osciller au bout d'un ressort.

La partie 1, très courte, est utile pour les deux autres. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles, mais font appel aux résultats de la partie 1. De plus, elles font appel aux deux modèles de forces suivantes :

- **Poussée d'Archimède.** *Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force verticale, dirigée du bas vers le haut, égale (et opposée) au poids du fluide déplacé.* Mathématiquement, si un objet de volume V est plongé entièrement dans le fluide, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ s'écrit :

$$\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g}$$

avec ρ_f la masse volumique du fluide et $\vec{g}$ le vecteur intensité de la pesanteur. Cette force est en général négligeable si le fluide est un gaz, mais ne peut pas être négligée pour les liquides !

- **Force de frottement de Stokes.** Dans le cours, on a vu que la force de frottement fluide s'écrit $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, avec α le cœfficient de frottements. Une étude de dynamique des fluides permet de détailler l'expression de α en fonction des caractéristiques du fluide et de l'objet, dans le cas où ce dernier est une sphère de rayon a. On obtient alors la *formule de Stokes* :

$$\vec{f} = -6\pi\eta a\vec{v}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse de la bille, et η la viscosité du fluide.

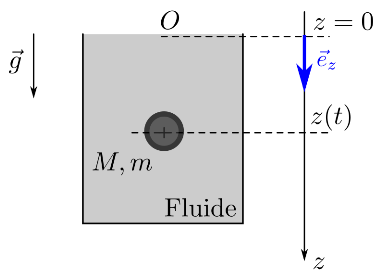
Dans tout le problème, la viscosité est notée η. L'étude mécanique ne portera que sur un seul axe z, vertical et orienté vers le bas. On prendra pour l'intensité de la pesanteur $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Partie 1 - Généralités sur les billes immergées dans un fluide visqueux

1. A partir de la formule de la force de frottements, déterminer la dimension de la viscosité η.
2. Parmi les trois formules suivantes, laquelle correspond au volume V d'une boule de matière de rayon a ?

$$V = \frac{4\pi}{3}a^2 \quad ; \quad V = \frac{4\pi}{3}a^3 \quad ; \quad V = 4\pi a$$

En déduire l'expression de la masse m de la bille, en fonction de son rayon a et de sa masse volumique ρ.



3. On considère que la bille est totalement immergée dans le fluide. Déterminer le *poids apparent* de la bille, $\vec{P}_{\text{app}}$, défini comme la somme du poids et de la poussée d'Archimède s'exerçant sur elle, en fonction de ρ, ρ_f, $\vec{g}$ et a.
4. A quelle condition sur ρ et ρ_f la bille coule-t-elle au fond du récipient ?

Dans toute la suite du problème, on supposera que $\rho_f < \rho$.

Partie 2 - Vitesse limite d'une bille immergée dans un fluide

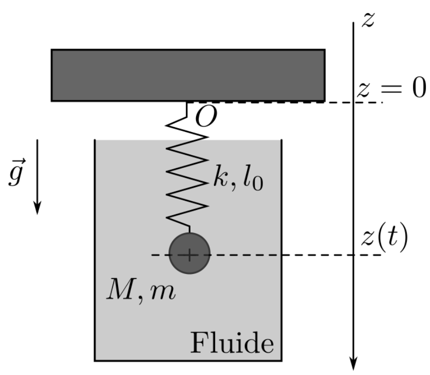
Dans cette partie, on place la bille dans le fluide visqueux, à l'altitude $z(t = 0) = 0$, puis on la lâche **sans lui donner de vitesse initiale**. L'étude du mouvement de la bille permet alors de déterminer la viscosité du fluide. La situation est représentée par le même schéma que la partie 1. On note $z(t)$ la position de la bille au cours du temps, et on note $v(t) = \frac{dz}{dt}$ la coordonnée de la vitesse de la bille suivant l'axe z.

5. On se place dans le référentiel terrestre. Faire le bilan de toutes les forces s'exerçant sur la bille lors de son mouvement.
6. Démontrer que v est solution d'une équation différentielle de la forme suivante :
$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{A}{\tau}$$
et donner les expressions des constantes τ et A en fonction des données du problème.
7. Donner une situation dans laquelle nous avons rencontré ce type d'équation différentielle en électrocinétique. Déterminer $v(t)$, avec les conditions initiales données par l'énoncé.
8. Démontrer que $v(t)$ tend vers une valeur finie, la *vitesse limite* lorsque $t \to +\infty$, que l'on notera v_l. Quel est le temps approximatif t_l au bout duquel la bille atteint sa vitesse limite, en fonction de τ ?
9. La viscosité de l'eau est de l'ordre de grandeur de $10^{-3}\,\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-2}}$. Estimer le temps t_l pour une bille en acier ($\rho \simeq 7\,\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$) d'un millimètre de rayon. Commenter cette valeur : est-ce qu'on peut considérer que la vitesse $v(t)$ est en fait approximativement constante pendant toute la chute de la bille ?
10. On réalise l'expérience : la bille de rayon $a = 5{,}0\,\mathrm{mm}$ et de masse volumique $\rho = 7{,}80\,\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$ chute dans un récipient rempli de fluide de hauteur $h = 50\,\mathrm{cm}$ et de masse volumique $\rho_f = 0{,}85\,\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$. Elle met un temps $\Delta t = 2{,}9\,\mathrm{s}$ pour atteindre le fond du récipient avec une vitesse initiale nulle. Estimer la valeur de η pour le fluide, et déterminer sa nature avec le tableau suivant. On vérifiera *a posteriori* qu'on pouvait négliger le régime transitoire.

Liquide	Eau	Huile d'olive	Ethanol	Glycérol
$\eta\,(\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-2}})$	$1,5\cdot 10^{-3}$	$8,1\cdot 10^{-2}$	$1,20\cdot 10^{-3}$	$1,49$

Partie 3 - Mesure de viscosité avec un oscillateur amorti

On considère une sphère en acier pleine de rayon a et de masse volumique ρ (dont on note m la masse), accrochée à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est accrochée solidement à un support horizontal immobile dans le référentiel terrestre. La sphère est plongée dans un liquide de viscosité η. On repère la position de la bille par sa profondeur $z(t)$: l'axe (Oz) est vertical et orienté vers le bas.



L'objectif est d'étudier le mouvement de la bille et son amortissement, pour mesurer la viscosité du liquide. On notera ρ_f la masse volumique du liquide.

Données : On donne les valeurs suivantes. Rayon de la sphère $a = 3{,}00\,\mathrm{mm}$. Longueur à vide du ressort $l_0 = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Raideur du ressort $k = 5{,}00\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Masse volumique de l'acier $\rho = 7{,}80\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

11. On se place dans le référentiel terrestre. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille.

12. En utilisant une loi de Newton, déterminer la position d'équilibre z_e de la sphère, en fonction de k, ρ, l_0, g, ρ_f et a.
13. En utilisant une autre loi de Newton, déterminer l'équation différentielle dont z est solution. On la mettra sous la forme canonique :

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$$

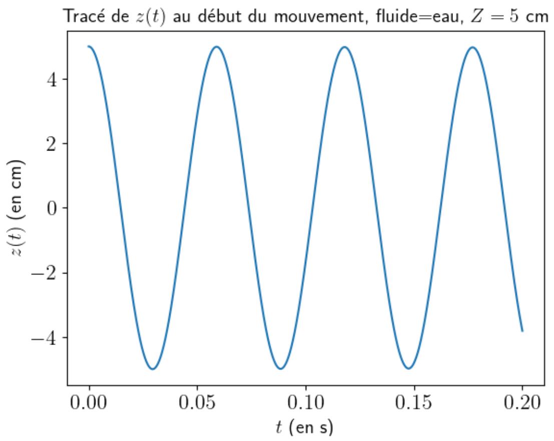
en introduisant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ la *pulsation propre* et $\zeta = \dfrac{3\pi\eta a}{\sqrt{km}}$ le *facteur d'amortissement*.

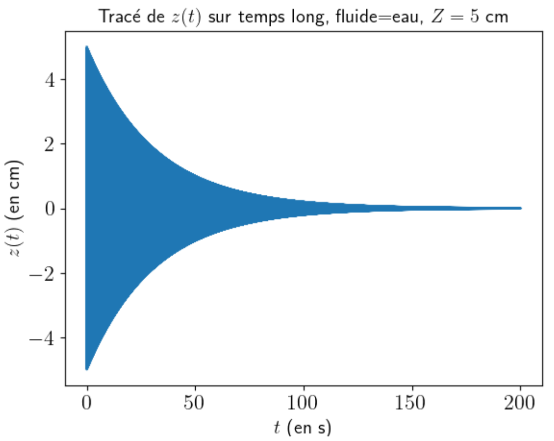
Remarque importante pour la suite de l'exercice : je sais que nous avons écrit l'équation sous forme canonique en introduisant le facteur de qualité Q plutôt que ζ. Cependant, l'énoncé vous impose les notations : interdit d'utiliser Q cette fois-ci !

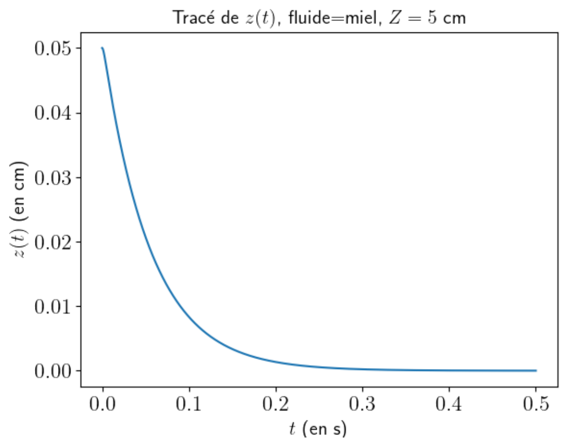
14. Ecrire l'équation homogène $(\mathcal{H})$ associée à l'équation $(\mathcal{E})$. Puis, en cherchant des solutions de $(\mathcal{H})$ sous la forme $t \mapsto e^{rt}$, déterminer l'équation caractéristique dont r doit être solution.
15. Calculer le discriminant Δ de l'équation, et discriminer suivant la valeur de ζ les trois cas possibles.

On utilise ce dispositif pour mesurer la viscosité de deux liquides à température ambiante : l'eau pure (faiblement visqueuse), et un miel (plus fortement visqueux). On fixe désormais les conditions initiales suivantes : la masse est éloignée d'une distance Z de sa position d'équilibre z_e, et est lâchée sans vitesse initiale.

On obtient, en faisant l'expérience, les courbes ci-dessous. Les deux courbes de gauche correspondent à l'expérience avec l'eau (celle du haut est un "zoom" de l'autre sur l'échelle de temps), et la courbe de droite à l'expérience avec le miel.







16. **Mesure de la viscosité de l'eau.** On travaille donc avec les courbes de gauche.

(a) Quel régime correspond au comportement du système dans ces conditions ? Qu'est-ce que cela impose sur la valeur de ζ ?

(b) Exprimer $z(t)$, dans ces conditions, en fonction des données du problème, en introduisant deux constantes d'intégration.

(c) Déterminer les constantes d'intégration avec les conditions initiales.

(d) A l'aide de la courbe, déterminer la valeur du temps de relaxation $\tau = \frac{1}{\omega_0\zeta}$. *On pourra regarder la pente de l'enveloppe à l'origine.*. En déduire la valeur de ζ.

(e) Déterminer la viscosité η_e de l'eau.

17. **Mesure de la viscosité d'un miel.** On travaille avec les courbes de droite.

(a) Quel régime correspond au comportement du système dans ces conditions ?

(b) Exprimer $z(t)$, dans ces conditions, en fonction des données du problème. On introduira deux constantes d'intégration, qu'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question.

(c) Introduire deux temps caractéristiques τ_1 et τ_2 à partir de l'expression de $z(t)$. On choisira $\tau_1 > \tau_2$. Montrer que, en supposant que $\zeta >> 1$, l'expression de τ_1 se simplifie en :

$$\tau_1 \simeq \frac{2\zeta}{\omega_0}$$

Donnée : si $\varepsilon << 1$, $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$

(d) A l'aide de la courbe, déterminer τ_1, puis ζ. En déduire la viscosité η_m du miel.

(e) Est-ce que l'approximation $\zeta >> 1$ était légitime ?

Bonus popculture

Pas de point, c'est seulement pour vous occuper/amuser ! En plus, c'est du E_5*...*

Dans une célèbre BD (dont on devinera le nom), une chanteuse d'opéra peu talentueuse, la Castafiore, est néanmoins capable de casser des verres avec sa voix *mélodieuse...*. Une étude expérimentale d'un verre en cristal montre qu'il se comporte approximativement comme un système masse-ressort de masse $m = 100\,\mathrm{g}$ et de raideur $k = 1{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. De plus, le facteur de qualité du système est de l'ordre de 2500.

Est-ce que la bande-dessinée est plausible ? Avec quelle précision la Castafiore doit être choisir la fréquence de sa voix ?