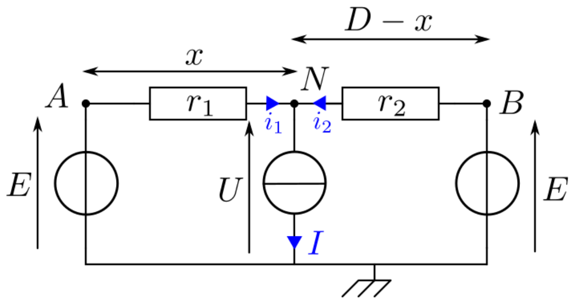
Devoir Surveillé 2 - Corrigé

Question de cours

Voir...le cours !

Exercice - Alimentation d'une locomotive

1. A partir de la relation donnée de $R(L)$: $\boxed{r_1 = \rho x}$.
2. Loi des mailles : $E = U + r_1 I$ car le circuit est ouvert en B. On en déduit directement
$$U = E - r_1 I \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U = E - \rho x I}$$
3. $\Delta U = E - U = \rho x I$ donc ΔU est maximal en $x = D$: $\boxed{\Delta U_{\text{max}} = \rho D I}$.
4. La ligne ne permettra pas à la locomotive d'atteindre la station suivante si $\Delta U_{\text{max}} = 50\,\text{V}$, donc $\boxed{D_{\text{max}} = \dfrac{\Delta U_{\text{max}}}{\rho I} = 1{,}0\,\text{km}}$. Cette valeur est plutôt faible, il faudrait mettre beaucoup de stations sur le trajet du train...
5.



6. Comme en 2., $\boxed{r_1 = \rho x}$ et $\boxed{r_2 = \rho(D - x)}$.
7. On utilise deux fois la loi des mailles, ce qui donne :
$$\begin{cases} r_1 i_1 &= E - U \\ r_2 i_2 &= E - U \end{cases}$$
Dont on tire $r_1 i_1 = r_2 i_2$. Puis on écrit la loi des nœuds en N ;
$$I = i_1 + i_2 \quad \Longrightarrow \quad i_1 = I - i_2 = I - \frac{r_1 i_1}{r_2}$$
D'où, en mettant tous les termes en i_1 du même côté :
$$i_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = I \quad \Longrightarrow \quad i_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} I = \left(\frac{D - x}{D}\right) I}$$
Attention ! On retrouve la même formule que le pont diviseur de courant, mais ce n'en est pas un à cause des générateurs ! On a bien la même formule que parce que les deux générateurs de tensions fournissent une tension identique E. Si les deux tensions étaient différentes, on ne pourrait pas les simplifier dans la loi des mailles. *Cela signifie que vous avez faux si vous avez utilisé la formule du pont diviseur de courant sans donner cet argument !*

8. Avec la loi des mailles dans la maille de gauche,

$$E = U + r_1 i_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U = E - \frac{\rho x(D-x)}{D} I}$$

9. En utilisant la définition de ΔU,

$$\Delta U = \frac{\rho x(D-x)}{D} I$$

On cherche son maximum en fonction de x : pour cela, on calcule la dérivée de ΔU par rapport à x et on essaie de l'annuler.

$$\frac{d\Delta U}{dx} = \frac{\rho I}{D}\left[D - x) + (-1)x\right] = \frac{\rho I}{D}(D - 2x)$$

et ainsi,

$$\frac{d\Delta U}{dx} = 0 \quad \Longleftrightarrow \boxed{x = x_m = \frac{D}{2}}$$

On peut vérifier que c'est bien un maximum, car la dérivée seconde de ΔU est $-2\rho I x/D$, et donc vaut $-\rho I < 0$ en $x = x_m$. La valeur associée de ΔU est $\boxed{\Delta U_{\text{max}} = \frac{\rho D I}{4}}$.

10. $\boxed{D_{\text{max},2} = \frac{4\Delta U_{\text{max}}}{\rho I} = 4{,}0\,\text{km}(= 4D_{\text{max},1})}$, ce qui est bien plus raisonnable pour réaliser une ligne de train. Cela explique pourquoi il faut que les stations de train soient régulièrement espacées (ainsi, pas besoin de rajouter des générateurs de tension en "milieu de trajet").
Pour les lignes à grande distance type TGV : on augmente fortement la tension d'alimentation ($E \simeq 25\,\text{kV}$), et on équipe les trains de transformateurs pour abaisser la tension d'alimentation avant le moteur. *C'est pour cela aussi qu'on trouve partout près des passages à niveaux/stations d'alimentation qu'il est très dangereux de toucher les câbles !*

Problème 1 - Optimisation du rendement de la charge d'un condensateur

Méthode 1 - Charge simple

1. $\boxed{u(0^-) = 0}$ car le condensateur est initialement déchargé. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$.
En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, donc l'intensité $i(+\infty)$ circulant dans le circuit est nulle. Une loi des mailles donne

$$E = u_R(+\infty) + u(+\infty) + Ri(+\infty) + u(+\infty) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u(+\infty) = E}$$

2. La loi des mailles donne

$$E = u_R + u = Ri + u$$

Or, i est lié à u par la loi du condensateur : $i = C\dfrac{du}{dt}$. En remplaçant,

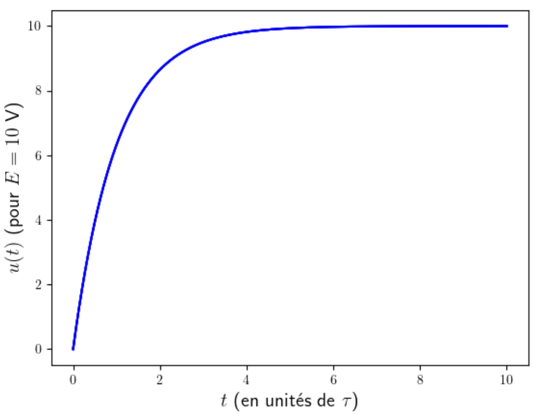
$$RC\frac{du}{dt} + u = E \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}}$$

avec $\boxed{\tau = RC}$.

3. On résout l'équation homogène
$$(\mathcal{H}) \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0$$
avec une solution de la forme
$$u_{\mathcal{H}}(t) = \lambda e^{-t/\tau}$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$ se déterminera à l'aide des conditions initiales. Il faut ajouter à cette solution de l'équation homogène une solution particulière $u_p(t)$ de l'équation complète. Le second membre étant constant, on recherche cette solution sous la forme d'une constante : $u_p(t) = u_p$. En remplaçant dans l'équation, on obtient que
$$\frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad u_p = E$$
Ainsi, la solution complète de l'équation s'écrit
$$u(t) = u_{\mathcal{H}}(t) + u_p = \lambda e^{-t/\tau} + E$$
On peut alors chercher λ avec la condition initiale $u(0) = 0$:
$$u(0) = 0 = \lambda e^0 + E = \lambda + E \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lambda = E}$$
Ainsi,
$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

> **Attention : on ne cherche λ qu'après avoir écrit la solution complète !** Trouver la valeur de λ avant d'avoir ajouté u_p à la solution conduirait à $\lambda = 0$, et donc $u(t) = u_p = E$ constante, ce qui est clairement faux.

4. E est la valeur de l'asymptote horizontale de la courbe en $t \to +\infty$. On pourrait mesurer τ en cherchant l'intersection de la tangente à la courbe en $t = 0$ et cette asymptote. *On lit sur le graphique, où l'axe des abscisses est en fait t/τ, que le régime permanent est atteint pour $t \sim 5\tau$, comme vu en cours.*



5. A partir de la loi du condensateur,
$$i(t) = C\frac{du}{dt}(t) = CE\left(\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$

6. On peut calculer une intégrale ou utiliser la formule donnant l'énergie d'un condensateur :

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}Cu(t)^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{E}_C(0^+) & = 0 \\ \mathcal{E}_C(+\infty) & = \frac{1}{2}CE^2 \end{cases}$$

Et ainsi

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{ch}} = \mathcal{E}_C(+\infty) - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2}CE^2}$$

7. $\mathcal{P}_{f,g} = Ei(t)$ car on a adopté la convention générateur pour lui dans le circuit, donc UI donne bien la puissance *fournie*. On peut alors calculer l'énergie totale fournie pendant la charge du condensateur :

$$\mathcal{E}_g = \int_{t=0}^{+\infty} d\mathcal{E}(t) = \int_{t=0}^{+\infty} Ei(t)\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}\,dt = \frac{E^2}{R}\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{E^2\tau}{R}(-0+1)$$

Et donc, avec $\tau = RC$, on obtient $\boxed{\mathcal{E}_g = CE^2}$.

8. On multiplie par i les deux membres de la loi des mailles pour faire apparaitre les puissances :

$$E = u_R + u \quad \Longrightarrow \quad Ei = u_R i + ui \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_{f,g} = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_R$$

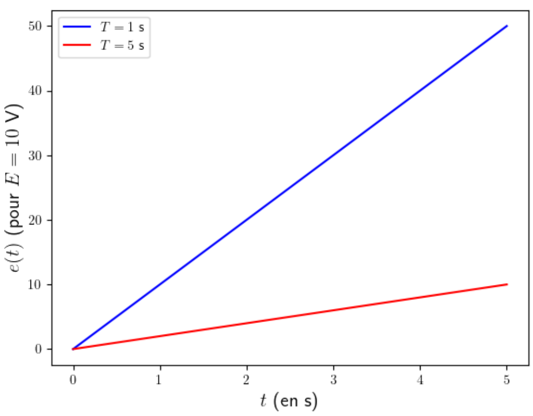
Avec $\mathcal{P}_C$ et $\mathcal{P}_R$ les puissances reçues par le condensateur et le résistor. On en déduit que $\mathcal{P}_R = \mathcal{P}_{f,g} - \mathcal{P}_C$, et donc que

$$\mathcal{E}_R = \int_{t=0}^{+\infty} (\mathcal{P}_{f,g} - \mathcal{P}_C)\,dt = \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_{\text{ch}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_R = \frac{1}{2}CE^2}$$

9. On a immédiatement $\boxed{\eta = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{CE^2} = \frac{1}{2}}$.

Méthode 2 - Charge progressive

10. *Remarque :* les courbes s'arrêtent en fait lorsque $t = T$, et donc $e(T) = E$ peu importe la valeur de T.. Dans un souci de simplicité pour réaliser le graphique, j'ai tracé les deux courbes pour un même intervalle de temps, mais l'augmentation de e pour $T = 1$ s s'arrête plus tôt.



11. L'équation différentielle est la même qu'à la question 2. de la première partie, en remplaçant E par $e(t) = \frac{t}{T}E$:

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{t}{\tau T}E}$$

12. L'équation homogène est toujours inchangée, donc sa solution s'écrit comme dans la question 3. :

$$u_{\mathcal{H}}(t) = \lambda e^{-t/\tau}$$

13. On cherche une solution sous la forme $u_p(t) = at + b$. On la remplace dans l'équation différentielle, avec $\dfrac{du_p}{dt} = a$:

$$\forall t \in [0;T] \ a + \frac{at+b}{\tau} = \frac{t}{\tau T}E$$

Cette relation est vraie pour tout t, donc en particulier en $t = 0$:

$$a\tau + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = -a\tau$$

et en $t = T$:

$$a\left(1 + \frac{T}{\tau}\right) + \frac{b}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad a\left(1 + \frac{T}{\tau} - 1\right) = \frac{E}{\tau}$$

et donc

$$\boxed{a = \frac{E}{T} \quad ; \quad b = -\tau a = -\frac{\tau}{T}E}$$

14. La solution de l'équation différentielle est donc

$$u(t) = u_{\mathcal{H}}(t) + u_p(t) = \lambda e^{-t/\tau} + at + b = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{t}{T}E - \frac{\tau}{T}E$$

On trouve λ avec la condition initiale $u(0) = 0$ toujours inchangée :

$$0 = \lambda e^0 + \frac{0}{T}E - \frac{\tau}{T}E = -\frac{\tau}{T}E \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\tau}{T}E$$

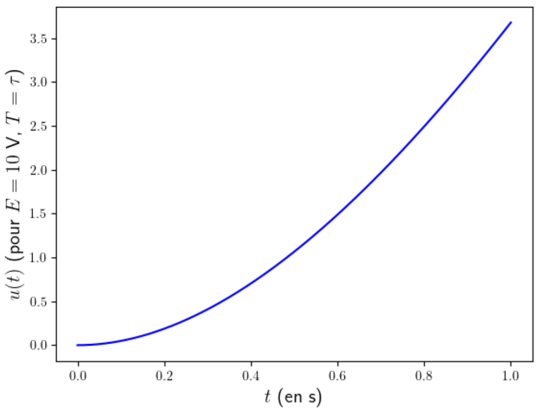
et ainsi

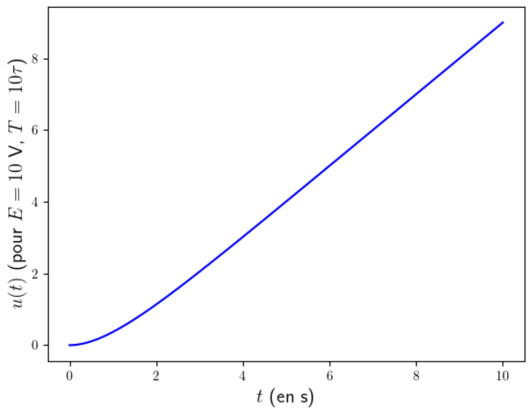
$$u(t) = \frac{\tau}{T}Ee^{-t/\tau} + \frac{t}{T}E - \frac{\tau}{T}E$$

On obtient la formule de l'énoncé en factorisant par $\frac{E}{T}$:

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{T}\left[\tau e^{-t/\tau} - \tau + t\right] = \frac{E}{T}\left[\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right) + t\right]}$$

15. La charge pour $T = \tau$ est naturellement plus rapide que celle pour $T = 10\tau$. L'allure de la courbe est très différente de celle de la charge classique.





Echelle des abscisses : pour $\tau = 1$ s.

16. On applique à nouveau la formule donnant l'énergie du condensateur, la charge ayant cette fois-ci lieu entre 0 et T :
$$\mathcal{E}_{\text{ch}} = \frac{1}{2}Cu(T)^2 - \frac{1}{2}Cu(0)^2$$
Or, $u(0) = 0$ et
$$u(T) = \frac{E}{T}\left[\tau\left(e^{T/\tau} - 1\right) + T\right] = E\left[\frac{\tau}{T}\left(e^{-T/\tau} - 1\right) + 1\right]$$
et donc, en remplaçant $\tau = RC$:
$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{ch}} = \frac{CE^2}{2}\left[\frac{\tau}{T}\left(e^{-T/\tau} - 1\right) + 1\right]^2}$$

17. A partir de la loi du condensateur,
$$i(t) = C\frac{du}{dt} = \frac{CE}{T}\left[\tau\frac{d}{dt}\left(e^{-t/\tau} - 1\right) + \frac{dt}{dt}\right] = \frac{CE}{T}\left[\tau\left(-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right) + 1\right]$$
et donc $\boxed{i(t) = \frac{CE}{T}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$.

18. On revient à la définition de la puissance fournie par le générateur $\mathcal{P}_{f,g} = e(t)i(t)$, et on intègre sur la durée de la charge (donc pour $t \in [0;T]$) :
$$\mathcal{E}_g = \int_0^T e(t)i(t)\,dt = \int_0^T \frac{Et}{\tau}\cdot\frac{CE}{T}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\,dt = \frac{CE^2}{T^2}\left(\int_0^T t\,dt - \int_0^T te^{-t/\tau}\,dt\right)$$
On calcule séparément les deux intégrales. La première est assez immédiate :
$$\int_0^T t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{T^2}{2}$$
La deuxième est un peu plus délicate : on effectue une intégration par parties ! Pour cela, on pose $f(t) = t$ (que l'on dérivera) et $g'(t) = e^{-t/\tau}$ (que l'on intègrera). La formule de l'intégration par parties s'écrit :
$$\int_0^T f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_0^T - \int_0^T f'(t)g(t)\,dt$$
Ici, on a
$$f'(t) = 1 \quad ; \quad g(t) = -\tau e^{-t/\tau}$$
Et donc :
$$\begin{aligned}\int_0^T te^{-t/\tau}\,dt &= \left[-t\tau e^{-t/\tau}\right]_0^T - \int_0^T -\tau e^{-t/\tau}\,dt\\ &= \left(-T\tau e^{-T/\tau} + 0\right) + \tau\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^T\\ &= -T\tau e^{-T/\tau} - \tau^2\left(e^{-T/\tau} - 1\right)\\ &= -\tau^2\left(\frac{T}{\tau}e^{-T/\tau} - e^{-T/\tau} + 1\right)\\ &= -\tau^2\left(1 + e^{-t/\tau}\left(\frac{T}{\tau} - 1\right)\right)\end{aligned}$$
Pour gagner un peu de temps d'écriture, on pose $x = T/\tau$,de sorte que en remplaçant les différents termes dans $\mathcal{E}_g$:
$$\mathcal{E}_g = \frac{CE^2}{T^2}\left[\frac{T^2}{2} + \tau^2\left(1 + e^{-x}(x-1)\right)\right] = CE^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\left(1 + xe^{-x} - e^{-x}\right)\right]$$
et enfin
$$\boxed{\mathcal{E}_g = CE^2\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x^2}\right]}$$

19. On applique directement la définition du rendement, en remplaçant également $x = T/\tau$ dans l'expression de $\mathcal{E}_{\text{ch}}$:

$$\eta' = \frac{\frac{CE^2}{2}\left[\frac{\tau}{T}\left(e^{-T/\tau}-1\right)+1\right]^2}{CE^2\left[\frac{1}{2}+\frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^{-x}-1}{x^2}\right]} = \frac{\left[\frac{1}{x}\left(e^{-x}-1\right)+1\right]^2}{1+\frac{2e^{-x}}{x}+\frac{2(e^{-x}-1)}{x^2}}$$

Ce qui n'est pas l'expression la plus gentille du monde, je sais. On peut calculer sa valeur si $T = \tau$, c'est-à-dire $x = 1$:

$$\boxed{\eta'(1) = \frac{e^{-2}}{1+2e^{-1}+2e^{-1}-2} = \frac{e^{-2}}{4e^{-1}-1} = 0,29}$$

29% de l'énergie fournie par le générateur a été donnée au condensateur : c'est moins bien que le rendement de la partie 1 ! Ce processus de charge est moins efficace si on choisit une valeur trop faible de T.

20. Si $T \to +\infty$, alors $x \to +\infty$ aussi. Tous les termes en e^{-x} de η' tendent vers 0, et dominent les termes en $1/x$ ou $1/x^2$ de sorte que

$$\boxed{\lim_{T\to+\infty} \eta'(T) = 1}$$

Ainsi, si la charge est infiniment lente, l'intégralité de l'énergie fournie par le générateur va au condensateur. Cela s'explique par la faiblesse de $i(t)$ si T est très grand (ce qu'on voit dans la formule) : si i est plus faible, il y a moins de dissipation d'énergie par effet Joule dans le générateur. Ce dispositif est donc plus adapté à la charge lente d'un condensateur.

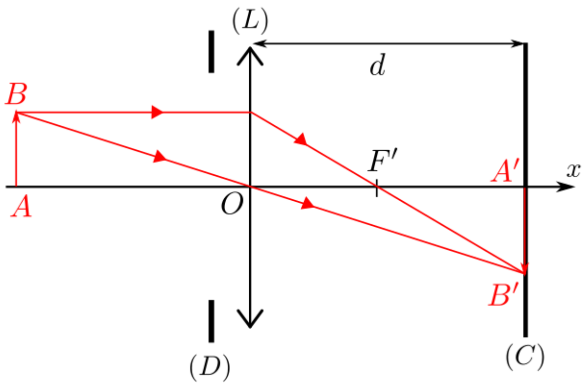
On pourrait résoudre l'équation $\eta(T) = \frac{1}{2}$ pour chercher à partir de quel temps de charge T cette deuxième méthode a un meilleur rendement que la première, mais elle est impossible à résoudre "à la main". L'outil informatique est adapté : par exemple la recherche de solution par dichotomie.

Problème 2 - Appareil photo

Partie 1 - Généralités sur l'appareil photo

1.1 Rayons paraxiaux (peu inclinés par rapport à l'axe optique, et proches de celui-ci). C'est le diaphragme qui aide à s'y trouver, en éliminant les rayons non paraxiaux.

1.2 Schéma ci-dessous.



1.3 Avec la formule du grossissement,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \implies \overline{A'B'} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Or, $\overline{AB} = h$ et $\overline{OA} = -L$ (attention au signe !). On peut exprimer $\overline{OA'} = d$ à l'aide de la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \Longrightarrow \quad \overline{OA'} = \frac{f'\overline{OA}}{f' + \overline{OA}} = \frac{-f'L}{f' - L}$$

Et donc

$$\boxed{\overline{A'B'} = \frac{h \cdot \frac{-f'L}{f'-L}}{-L} = \frac{hf'}{f' - L} = -13\,\mathrm{mm}}$$

1.4 (a) $\boxed{d = f'}$ si l'objet est à l'infini par définition du foyer principal image.

(b) Si l'objet est trop près ($L < L_{\mathrm{min}}$), alors l'objectif n'est pas suffisamment convergent pour former l'image sur le capteur : elle se formera en aval et la photo sera floue. A l'inverse, si l'objet est à l'infini, l'appareil pourra toujours faire une image nette sur le capteur : il suffit de placer ce dernier dans le plan focal image de la lentille (cela correspond en fait à la distance minimale d_{min} entre la lentille et le capteur).

(c) Dans le cas où $L = L_{\mathrm{min}}$, la lentille est éloignée au maximum du capteur : $d = d_{\mathrm{max}}$. La relation de conjugaison donne

$$\frac{1}{d_{\mathrm{max}}} - \frac{1}{L_{\mathrm{min}}} = \frac{1}{f'}$$

Dont il découle rapidement que $\boxed{L_{\mathrm{min}} = \frac{f'd_{\mathrm{max}}}{d_{\mathrm{max}} - f'} = 55\,\mathrm{cm}}$.

1.5 Comme on a doublé f', on a approximativement doublé la valeur de $\overline{A'B'}$ (s'en convaincre avec l'application numérique : $L >> f'$ donc $f' - L$ est presque inchangé) : $\overline{A'B'} = 25\,\mathrm{mm}$. Impossible de voir le sujet en entier en format paysage : il faut prendre la photo en format portrait !
Les différents détails de la photo sont tous agrandis, d'où l'impression de "zoom".

1.6 On applique à nouveau la relation de conjugaison pour déterminer d' :

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f_2'} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d' = \frac{Lf_2'}{L - f_2'} = 100\,\mathrm{mm} \simeq f_2'}$$

(ce qui était attendu : $L >> f_2'$ donc l'objet est approximativement à l'infini). L'objectif est moins facile à transporter ($10\,\mathrm{cm}$ de long tout de même !)

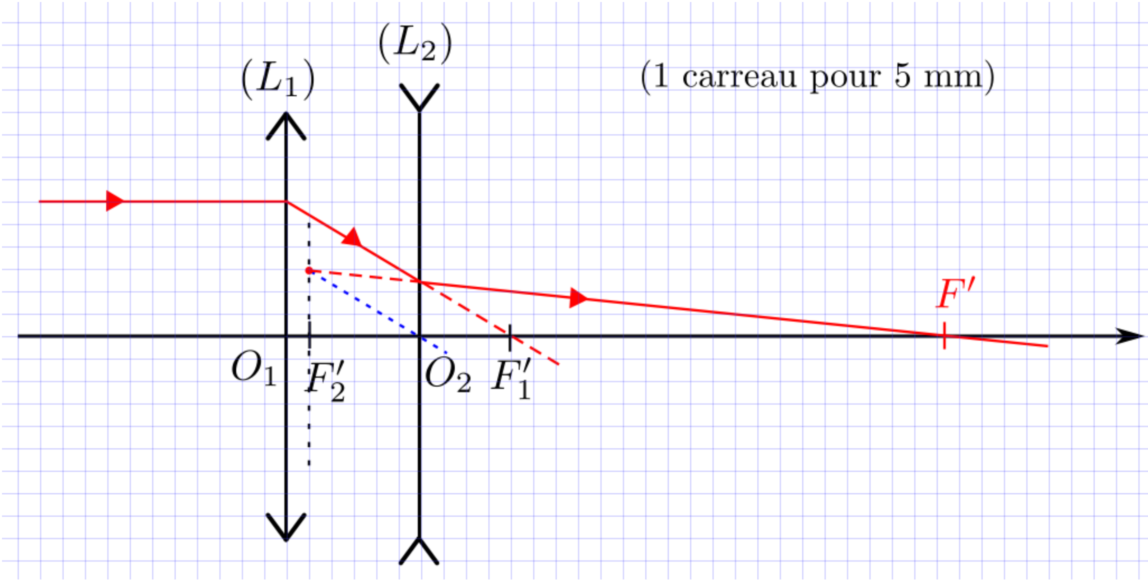
1.7 Le Mont Saint-Michel étant éloigné de la zone de prise de vue, on peut considérer que son image se trouvera dans le plan focal de la lentille de l'objectif. Si on note h et h' les hauteurs du Mont et de son image sur le capteur, la relation du grandissement donne (en valeur absolue)

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{BC} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{h'BC}{f'}$$

On détermine h' et f' à partir des spécifications de l'appareil photo : Le Canon G10 a un capteur de $5,7 \times 7,6\,\mathrm{mm}$, et le Mont occupe approximativement 35% de la hauteur de la photo. Ainsi $h' \simeq 2{,}0\,\mathrm{mm}$. L'énoncé n'a pas spécifié la distance focale (*désolé...tout calcul fait avec les valeurs précédentes sera compté comme correct*), qui est en fait de $f' = 18\,\mathrm{mm}$, ce qui mène à $h = 1{,}6 \cdot 10^2\,\mathrm{m}$.

Partie 2 - Réalisation d'un téléobjectif à deux lentilles

2.1 Le foyer principal image d'un système optique est le point image d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique. On le détermine en traçant la marche de deux rayons parallèles à l'axe optique à travers le système, et en cherchant leur intersection. Le rayon sortant de $(L_1$ passe par le point F_1' virtuellement. Pour tracer la marche du rayon sortant de (L_2), on trace un rayon parallèle au rayon incident passant par O_2, qui ne sera donc pas dévié, puis on utilise le fait que ces deux rayons doivent se croiser dans le plan focal image de (L_2). On mesure alors graphiquement $O_2F' \simeq 23$ carreaux $\simeq 11{,}5\,\mathrm{cm}$.



2.2 L'enchaînement d'images se schématise ainsi : $\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1 \xrightarrow{(L_2)} F'$. En appliquant la relation de conjugaison de Descartes à la deuxième lentille, on obtient

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \Longrightarrow \quad \overline{O_2F'} = \frac{\overline{O_2F'_1} \cdot f'_2}{\overline{O_2F'_1} + f'_2}$$

De plus, $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -e + f'_1$ par "relation de Chasles". Ainsi,

$$\boxed{\overline{O_2F'} = \frac{(f'_1 - e)f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = 79\,\mathrm{mm}}$$

La valeur numérique est du même ordre de grandeur que celle obtenue en 2.1.

2.3 On a $\overline{O_1F'} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F'}$. Comme $\overline{O_1F'} > 0$, on a

$$\boxed{\Delta = \left|\overline{O_1F'}\right| = e + \frac{(f'_1 - e)f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = 11\,\mathrm{cm}}$$

Ce qui reste conséquent, mais plus faible qu'un téléobjectif à une seule lentille : dans ce cas, on perd la "convergence rapide" du rayon sortant de (L_1).

2.4 Il faut "faire passer" le Mont Saint Michel $\overline{AB}$ par les deux lentilles. Si on note $\overline{A_1B_1}$ la taille de l'image intermédiaire, et $\overline{A_2B_2}$ celle de l'image sur le capteur, on peut appliquer deux fois de suite les relations de conjugaison de grandissement :

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \quad ; \quad \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}$$

Or, A_1B_1 se forme dans le plan focal image de (L_1), et A_2B_2 sur le capteur. La première relation donne donc

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{h} = \frac{f'_1}{-d} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A_1B_1} = -\frac{f'_1}{d}h$$

Et la deuxième donne, en remplaçant :

$$\overline{A_2B_2} = \frac{\overline{O_2F'}}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1}}\overline{A_1B_1} = \frac{(f'_1 - e)f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} \cdot \frac{1}{-e + f'_1} \times \left(-\frac{f'_1}{d}h\right)$$

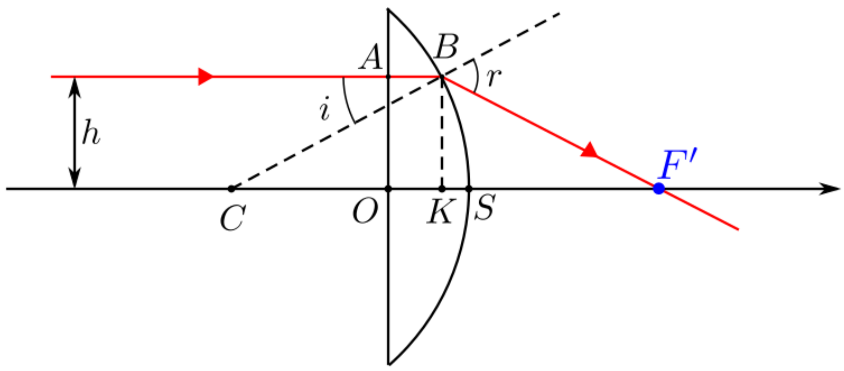
Ainsi, toutes simplifications faites :

$$h' = -\frac{f_2' f_1' h}{d(f_1' + f_2' - e)} = 33\,\text{mm}$$

La taille de l'image sur le capteur $1,5$ fois plus grande que celle de la section précédente, qui était de focale $f' = 100\,\text{mm}$, et présentait un encombrement $df'/(d - f') \simeq f' \simeq 100\,\text{mm}$ comparable à ce téléobjectif. On peut donc considérer qu'il est plus performant !

Partie 3 - Focale d'une lentille hémisphérique : vers un microscope-smartphone !

3.1 Par définition, le foyer principal image est l'image d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique : c'est donc l'intersection d'un rayon incident parallèle à l'axe optique avec ce dernier en sortie de système.



3.2 $\boxed{n \sin i = \sin r}$.

3.3 On a $\overline{OF'} = \overline{OK} + \overline{KF'}$. De plus, on connaît $CB = R$, $OS = e$, $BK = h$ et $CS = R$. Il faut exploiter les différents triangles rectangles de la figure et des relations de Chasles pour tout exprimer en fonction de ces distances connues.

- Dans KBF', l'angle en F' vaut $r - i$. On en déduit $\tan(r-i) = \frac{KB}{KF'}$ et donc

$$\overline{KF'} = KF' = \frac{KB}{\tan(r-i)}$$

- Dans CKB, l'angle en C vaut i, donc $\sin i = \frac{KB}{CB} = \frac{KB}{R}$, donc $KB = R \sin i$.
- $\overline{OK} = \overline{OS} + \overline{SK} = e - SK$, et $SK = CS - CK = R - CK$. Or, dans le triangle CKB, on trouve que $\cos i = \frac{CK}{BC} = \frac{CK}{R}$, donc $CK = R\cos i$. On en déduit que

$$\overline{OK} = e - R + R\cos i = e + R(1 - \cos i)$$

Ainsi, on obtient

$$\boxed{f' = \overline{OF'} = e + R(1 - \cos i) + \frac{R \sin i}{\tan(r-i)}}$$

3.4 Si h change, alors f' change aussi car l'angle i (et donc l'angle r aussi) changent. Cela signifie que des rayons parallèles entre eux à l'entrée de la lentille ne se croiseront pas forcément sur l'axe optique : le système n'est pas stigmatique.

3.5 Dans les conditions de Gauss, h est très faible devant toutes les autres distances du problème. Cela signifie que les angles i et r sont très faibles : $\cos i \simeq 1$, $\sin i \simeq i$ et $\tan(r-i) \simeq r-i$. Ainsi,

$$f' \simeq e + R(1-1)\frac{Ri}{r-i}$$

La loi de la réfraction se réécrivant $ni \simeq r$, on en déduit que

$$\boxed{f' \simeq e + \frac{R}{n-1}}$$

Cette fois-ci, f' est indépendante des angles, et donc de h : le système est stigmatique (ce qui est attendu dans les conditions de Gauss).

3.6 (a) $e = R$. En remplaçant dans la formule approchée de la question 3.5,

$$\boxed{f' = \frac{R(n-1)+R}{n-1} = \frac{nR}{n-1}}$$

(b) Le *punctum proximum* est le point le plus proche qu'il soit possible de voir nettement (en accomodant au maximum). $d_{pp} \simeq 25\,\mathrm{cm}$ pour l'œil emmétrope.

(c) $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{AB}{d}}$. La taille angulaire augmente à mesure que d diminue, donc la valeur maximale de α correspond à $d = d_{pp}$, soit

$$\boxed{\tan\alpha_m = \frac{AB}{d_{pp}}}$$

(d) Il faut que l'image se forme à l'infini, donc que l'objet se trouve dans le plan focal objet de la lentille-goutte d'eau. Dans ces conditions, avec un objet de taille AB,

$$\boxed{\tan\alpha' = \frac{AB}{f'}}$$

(e) Dans l'approximation de Gauss,

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_m} \simeq \frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha_m} \simeq \frac{AB}{f'}\cdot\frac{d_pp}{AB} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{G_c = \frac{d_{pp}}{f'}}$$

On remarque que plus f' est faible, et plus G_c est grand. Pour la lentille goutte,

$$G_c = \frac{(n-1)d_{pp}}{nR} = 62$$

Ce qui est très grand : cela signifie que si on regardait à travers la lentille, on verrait l'objet 62 fois plus grand que ce que l'œil nu pourrait voir en observant au plus près possible ! Plus la goutte est petite, et plus le grossissement est fort. *Voir le TP O6 pour la réalisation expérimentale, c'est assez impressionnant !*

Bonus popculture : la puissance de Darth Sidious

Il faut appliquer une tension $U = E_d x$ avec $x \simeq 5\,\mathrm{m}$ la distance entre Luke et Sidious. On peut alors calculer la puissance électrique fournie par Sidious : $\mathcal{P} = UI = E_d x I$, et donc l'énergie totale fournie pendant $\Delta t \simeq 5\,\mathrm{s}$, pour l'intensité (plutôt faible) $I = 0{,}10\,\mathrm{A}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}\Delta t = E_d x I \Delta t = 7{,}5\,\mathrm{MJ}(\simeq 2\,\mathrm{kWh})$$

C'est l'énergie dépensée par un four de cuisine pendant une heure. Ce n'est pas si énorme.

En réalité, l'intensité électrique dans un éclair est de l'ordre de 10^4 A, mais sa durée est de l'ordre de la ms, ce qui donnerait

$$\mathcal{E} \simeq 1{,}50\,\mathrm{MJ} \simeq 41\,\mathrm{kWh}$$

ce qui correspond à $3/4$ de la capacité de la batterie de ma voiture électrique ! Luke n'a aucune chance de survie. En même temps, cela ne paraît pas très efficace d'utiliser les éclairs pour alimenter ses appareils électriques...l'énergie contenue dans un éclair est environ 1000 fois plus élevée car les nuages se trouvent à quelques km d'altitude, ce qui reste insuffisant pour alimenter toute une population)