Devoir Surveillé 2

L'épreuve dure 4 heures. Le sujet est constitué de 8 pages, et comporte une question de cours, un exercice et deux problèmes. L'usage de la calculatrice est autorisé.

*Résoudre les exercices de ce sujet sur **copies doubles**. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements comptent pour une part importante de l'évaluation de la copie, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition, en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Question de cours (maximum 20 minutes !)

1. Faire un schéma du pont diviseur de tension, et rappeler sans démonstration les relations permettant de calculer les tensions aux bornes de chaque résistance.
2. Démontrer, en calculant une intégrale, la formule donnant la variation d'énergie $\Delta E_C = E_C(t_2) - E_C(t_1)$ d'un condensateur entre les temps t_1 et t_2, en fonction notamment de la tension à ses bornes.
3. On considère un circuit RL série, alimenté par un générateur idéal de tension, éteint pour $t < 0$, qu'on allume à $t = 0$. Il fournit alors une tension constante E_0.
   (a) Pourquoi est-ce que $i(t < 0) = 0$? Que vaut $i(t = 0^+)$? $i(t \to \infty)$?
   (b) Déterminer l'équation différentielle dont l'intensité i circulant dans le circuit est solution. Introduire un temps caractéristique τ.
   (c) Résoudre cette équation différentielle, en tenant compte des conditions initiales.

Exercice 1 - Alimentation d'une locomotive

Une locomotive électrique est alimentée en courant continu. L'alimentation est réalisée par une station placée en début de ligne, et représentée par un générateur idéal de tension de force électromotrice $E > 0$, qui est reliée aux rails (de potentiel nul) et à la caténaire (ensemble de lignes conductrices au dessus du train).
La motrice M est branchée entre les rails et la caténaire. On suppose que son moteur est alimenté par un courant constant I : on la modélise donc comme un générateur idéal de courant I.

Données :

- On néglige la résistance électrique des rails. En revanche, la caténaire présente une résistance par unité de longueur ρ. ρ s'exprime en $\Omega \cdot \mathrm{m}^{-1}$: cela signifie qu'une longueur L de caténaire à une résistance $R(L)$ donnée par
$$R(L) = \rho L$$
- Valeurs numériques : $\rho = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\,\Omega \cdot \mathrm{m}^{-1}$; $E = 1{,}5\,\mathrm{kV}$; $I = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{A}$.

Partie 1 : Système à une seule station

On considère une section de ligne de longueur totale D alimentée par une seule station S_1, représentée par les schémas ci-dessous. x est la distance qui sépare la locomotive de la station.

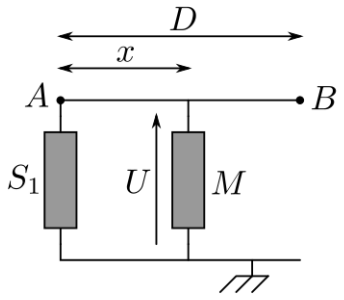


Schéma électrique.
Le circuit est ouvert en B

$\Longleftrightarrow$

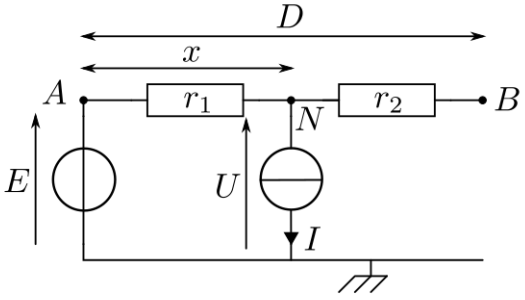


Schéma électrique équivalent

1. Exprimer r_1, la résistance de la caténaire, en fonction de ρ et x.
2. Exprimer la tension U aux bornes de la motrice en fonction de E, r_1, r_2 et I. Puis l'exprimer en fonction de ρ, E, x et I.
3. En déduire la chute de tension $\Delta U = E - U$. Calculer la valeur x_0 de x pour laquelle ΔU est maximale, et en déduire celle de ΔU_{max}, la chute de tension maximale.
4. La locomotive ne fonctionne plus correctement si $\Delta U > 50\,\text{V}$. Calculer la longueur maximale $D_{max,1}$ que peut avoir la ligne tout en garantissant un fonctionnement correct, et commenter ce résultat.

Partie 2 : Système à deux stations

Comme dans la première partie, la caténaire est constituée d'une seule voie de longueur D. Cependant, l'alimentation vient maintenant de deux stations S_1 et S_2, situées aux extrémités de la ligne, fournissant la même force électromotrice E. On note x la distance entre la motrice M et la station S_1.

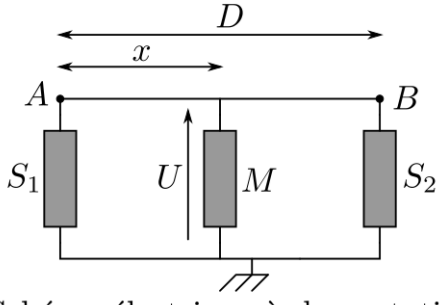


Schéma électrique à deux stations

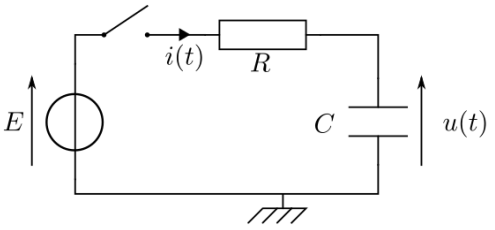
5. En vous inspirant de la première partie, dessiner le schéma électrique équivalent (générateurs, résistances...).
6. Exprimer r_1 et r_2 en fonction de ρ, x et D.
7. Exprimer l'intensité i_1 traversant la résistance r_1 en fonction de r_1 et r_2, puis en fonction de D, x et I. *Indication : les générateurs sont idéaux, et n'ont donc pas de résistance.*
8. En déduire la tension U aux bornes de la motrice en fonction de E, ρ, x, D et I.
9. Calculer la chute de tension $\Delta U = E - U$, puis chercher la valeur x_m de x pour laquelle cette chute de tension est maximale. Calculer alors la valeur de cette chute de tension maximale.
10. Calculer la nouvelle longueur maximale $D_{max,2}$ de la ligne garantissant un fonctionnement correct de la locomotive, et commenter le résultat.

Problème 1 - Optimisation du rendement de la charge d'un condensateur

Le but de ce problème est d'étudier plusieurs stratégies de charge d'un condensateur, afin de trouver celle qui demande au générateur de fournir le moins d'énergie possible. Les différentes parties sont indépendantes.

Méthode 1 - Charge simple

On s'intéresse au circuit électrique ci-contre, constitué d'une source idéale de tension, d'un interrupteur, d'un résistor et d'un condensateur en série. Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et le condensateur déchargé. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Que vaut la tension u aux bornes du condensateur à $t = 0^-$? $t = 0^+$? Quand $t \to +\infty$?
2. Etablir l'équation différentielle dont u est solution. Quelle est l'expression du temps caractéristique τ associé à cette équation différentielle, en fonction des caractéristiques des composants ?
3. Déterminer la fonction $u(t)$. *On n'oubliera pas d'appliquer la condition initiale !*
4. Tracer l'allure de la courbe $u(t)$. Y faire apparaître la valeur de E, et expliquer comment on pourrait mesurer τ à partir de cette courbe.
5. Déduire de l'expression de $u(t)$, celle de $i(t)$.
6. Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_C(0)$ emmagasinée dans le condensateur en $t = 0^+$, puis $\mathcal{E}_C(t \to +\infty)$. En déduire la quantité d'énergie $\mathcal{E}_{\text{ch}}$ gagnée par le condensateur pendant la charge, en fonction de C et de E.
7. Rappeler l'expression de la puissance $\mathcal{P}_{f,g}$ fournie au circuit par le générateur en fonction notamment de $i(t)$. En déduire l'énergie $\mathcal{E}_g$ fournie par le générateur pendant toute la charge du condensateur, à l'aide d'un calcul d'intégrale. Exprimer le résultat en fonction de C et de E.
8. Faire un bilan d'énergie : établir le lien entre les puissances fournies/reçues des différents composants du circuit. En déduire l'énergie $\mathcal{E}_R$ reçue par le résistor pendant la charge complète du condensateur, en fonction de C et E.
9. On définit le rendement η de la charge par la relation :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{ch}}}{\mathcal{E}_g}$$

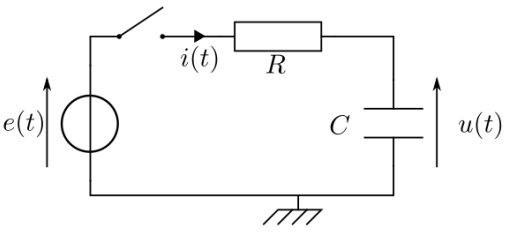
Démontrer que $\eta = 1/2$.

Méthode 2 - Charge progressive

Cette fois-ci, on essaie d'améliorer le rendement en augmentant progressivement la tension délivrée par le générateur. On remplace donc E par une fonction du temps $e(t)$. Dans cette partie, on suppose que

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } < 0 \\ \dfrac{t}{T}E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

avec T la durée de la charge, et E la même tension que dans la méthode 1.
Comme précédemment, pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur ouvert. On ferme l'interrupteur à $t = 0$, et on laisse le condensateur se charger.



L'interrupteur est ouvert à nouveau quand $t = T$, de sorte que la charge du condensateur s'arrête. On ne s'intéressera pas à $t > T$ (mais on va voir l'effet de la valeur de T sur la charge du condensateur).

9. Tracer l'allure de la courbe $e(t)$. Si on augmente T, e varie-elle plus vite ou moins vite ? Quelle est la valeur de $e(t)$ lorsque la charge est terminée ?
10. Etablir l'équation différentielle dont $u(t)$ est solution.
11. Déterminer $u_{\mathcal{H}}(t)$, la solution générale de l'équation homogène associée. On introduira une constante d'intégration λ.
12. On recherche une solution particulière de l'équation différentielle sous la forme

$$u_p(t) = at + b$$

avec a et b des constantes. Déterminer les constantes a et b en fonction des données du problème.

13. Déduire de ce qui précède que

$$u(t) = \frac{E}{T}\left[\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right) + t\right]$$

14. Tracer l'allure de $u(t)$ pour $t \in [0; T]$ pour $T = \tau$, puis $T = 10\tau$. *Vous pouvez vous aider de votre calculatrice.*
15. Calculer l'énergie $\mathcal{E}'_{\text{ch}}$ gagnée par le condensateur pendant cette charge.
16. Déterminer l'expression de $i(t)$.
17. *Plus calculatoire : admettre le résultat si vous n'y arrivez pas !* On pose $x = T/\tau$. Démontrer que l'énergie fournie par le générateur entre $t = 0$ et $t = T$ est

$$\mathcal{E}'_g = CE^2\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x^2}\left(e^{-x} - 1\right)\right]$$

18. En déduire l'expression en fonction de x du rendement

$$\eta' = \frac{\mathcal{E}'_{\text{ch}}}{\mathcal{E}'_g}$$

et calculer sa valeur numérique si $T = \tau$. Comparer avec la partie 1.

19. On s'intéresse à une charge lente, ce qui signifie que $T >> \tau$. Calculer $\lim\limits_{T\to\infty} \eta'(T)$, et commenter physiquement : pourquoi est-ce qu'une charge très lente a un rendement plus élevée qu'une charge standard ? Quelle méthode, parmi les deux, faut-il choisir en fonction de la durée de charge ?

Problème 2 - Appareil photo

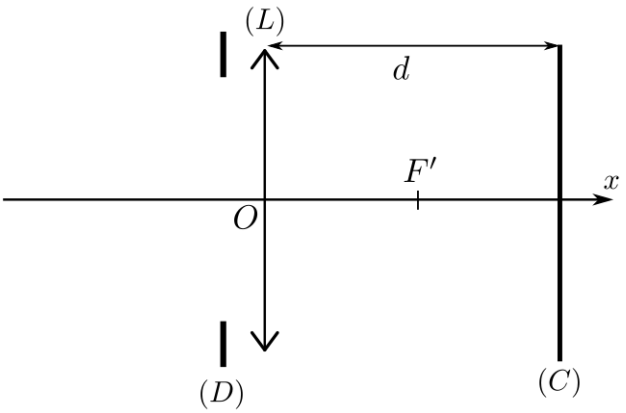
L'appareil photo est une très vieille invention : la première photographie connue a été prise en 1927 par Nicéphore Niepce, ingénieur français. L'appareil, initialement très simple, a une histoire très riche, et les modèles d'aujourd'hui peuvent être très différents les uns des autres.

Néanmoins, le principe reste le même : on forme une image d'un objet sur un capteur photosensible (plaque de nitrate d'argent, capteur électronique, ...) à l'aide d'un ensemble de lentilles, se comportant comme une seule lentille convergente. On peut faire l'image d'objets situés à des distances différentes en changeant la distance entre la lentille et le capteur : c'est la *mise au point*.

La partie 1 traite du modèle optique simplifié de l'appareil photo, la partie 2 concerne le téléobjectif, dispositif permettant de prendre des photos agrandies d'objets lointains, et la partie 3 propose de réaliser un microscope à partir de l'objectif de votre smartphone. Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 - Généralités sur l'appareil photo

On modélise un appareil photo par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée *objectif*, d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image, et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille. La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif : elle est comprise entre deux valeurs extrêmes d_{min} et d_{max}.



A l'aide de cet appareil, ou souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur $h = 5\,\text{m}$ situé à une distance $L = 20\,\text{m}$ devant l'objectif, dont on note la distance focale f'_1.

1.1 La lentille est utilisée dans les conditions de Gauss. Préciser en quoi elles consistent, et quelle partie de l'appareil permet d'assurer qu'on respecte bien ces conditions.

1.2 Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et $A'B'$ son image sur le capteur (A étant sur l'axe, et AB étant perpendiculaire à l'axe). Positionner les foyers principaux de la lentille, et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $A'B'$.

1.3 Exprimer la taille $\overline{A'B'}$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h, f'_1 et L, puis faire l'application numérique pour une focale de $50\,\text{mm}$. Cette image est-elle droite ou renversée ?

1.4 (a) Que vaut d si l'objet est à l'infini ?
(b) Montrer qu'il existe une distance limite L_{min} en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour $L > L_{\text{min}}$.
(c) Exprimer L_{min} en fonction de f'_1 et d_{max}, et faire l'application numérique pour la même focale que dans la question précédente et pour $d_{\text{max}} = 55\,\text{mm}$.

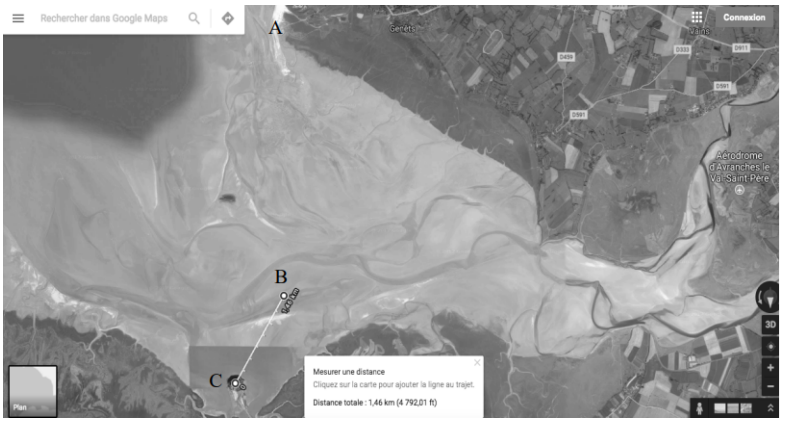
Pour obtenir une image agrandie du sujet, on peut utiliser un *téléobjectif*. C'est un objectif de grande focale $f'_2 = 100\,\text{mm}$ (c'est-à-dire de focale supérieure à la diagonale de la pellicule/capteur électronique de l'appareil), qui permet de réaliser des cadrages serrés des sujets, avec un champ angulaire très étroit : les photos paraissent "zoomées".

1.5 Dans les mêmes conditions de prise de vue que les questions précédentes ($L = 20\,\text{m}$, $h = 5\,\text{m}$), quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ? Pourra-t-on voir l'arbre en entier sur la photo, si le capteur, rectangulaire, a pour dimensions $24\,\text{mm} \times 36\,\text{mm}$? Justifier que la photo paraît "zoomée".

1.6 Calculer la distance d' du téléobjectif dans ces conditions. Justifier qu'il est plus *encombrant* que l'objectif simple.

1.7 **Résolution de problème.** La photo du mont Saint-Michel ci-dessous a été prise avec un appareil photo numérique Canon G10. Les informations relatives à cet appareil, ainsi qu'à la photo sont disponibles dans les documents ci-dessous.
Déterminer la hauteur du mont Saint-Michel (flèche comprise). On détaillera le raisonnement et les hypothèses simplificatrices utilisées.

Standard	Diagonale	Dimensions	Exemples
1/2,5"	7,18 mm	4,29x5,76 mm	Panasonic TZ6
1/2,3"	7,7 mm	4,62x6,16 mm	Nikon P90, Canon 110 IS
1/2"	8 mm	4,8x6,4 mm	Fuji F70EXR
1/1,7"	9,5 mm	5,7x7,6 mm	Canon G10
1/1,6"	10 mm	6x8 mm	Fuji S200EXR
4/3"	21,6 mm	13x17,3 mm	reflex 4/3 et hybrides Micro 4/3
APS	24,8 mm à 28,4 mm	13,8x20,7 mm (Sigma) à 15,8x23,6 mm (Nikon, Sony)	reflex amateurs
24x36	43,3 mm	24x36 mm	Nikon D700, Sony Alpha 900



Le mont Saint Michel est en C, et le photographe se situe en B. $BC = 1{,}46\,\mathrm{km}$.

Partie 2 - Réalisation d'un téléobjectif à deux lentilles

Afin de raccourcir les téléobjectifs, souvent très encombrants (surtout pour les plus puissants), on peut associer deux lentilles : une lentille convergente (L_1) de centre O_1 et de focale $f'_1 = 50\,\mathrm{mm}$, puis une lentille divergente (L_2) de centre O_2 et de focale $f'_2 = -25\,\mathrm{mm}$. On note $e = O_1O_2 = 31\,\mathrm{mm}$. On note P l'intersection du plan du capteur de l'appareil photo avec l'axe optique, et F' le foyer principal image du *téléobjectif entier*. On essaie dans cette partie de faire la photographie du mont Saint Michel, de hauteur $h = 160\,\mathrm{m}$.

2.1 Rappeler la définition du foyer principal image d'un système optique. Déterminer la position de F' en faisant une **construction géométrique** sur un schéma *à l'échelle* du téléobjectif. Déterminer, par une mesure sur le schéma, la distance $\overline{O_2F'}$ (*la vraie valeur, pas celle avec votre échelle !*

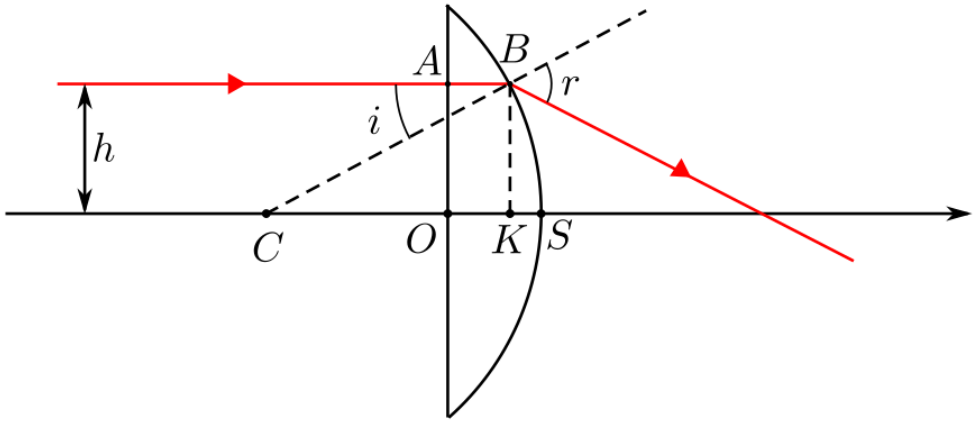
2.2 Déterminer l'expression littérale de $\overline{O_2F'}$ en fonction de f'_1, f'_2 et e. Faire l'application numérique et comparer avec la question 2.1.

2.3 En déduire l'encombrement Δ de l'appareil (distance entre (L_1) et la pellicule). Commenter ce résultat.

2.4 Déterminer la hauteur h' de l'image du mont Saint Michel sur la pellicule, en fonction de f'_1, f'_2, e, d et h. Commenter le résultat. *On pourra comparer ce qu'on aurait obtenu avec un téléobjectif à une seule lentille.*

Partie 3 - Focale d'une lentille hémisphérique : vers un microscope-smartphone !

Les propriétés de convergence/divergence des lentilles viennent de leur forme géométrique. Dans cette section, on considère une lentille plan-convexe, schématisée ci-dessous. Le dioptre incurvé de la lentille est une portion de sphère, de centre C et de rayon $R = BC$. On assimile le point O au centre optique de la lentille. L'épaisseur de la lentille au centre est $e = OS$. On ne prêtera pas d'attention particulière aux signes des angles ici, car il n'y a pas d'ambiguïté possible.



On cherche la position du foyer principal image de la lentille en fonction des différents paramètres géométriques. Pour cela, on s'intéresse à un rayon incident parallèle à l'axe optique, situé à une "hauteur" h par rapport à celui-ci.

3.1 Reproduire rapidement le schéma sur votre copie, et indiquer la position du foyer principal image F' de la lentille sur celui-ci, en justifiant par une phrase.

3.2 Ecrire la loi de la réfraction en B.

3.3 Montrer que la focale de la lentille $f' = \overline{OF'}$ est donnée par

$$f' = e - R(1 - \cos i) + \frac{R \sin i}{\tan(r - i)}$$

3.4 Si on change la valeur de h, est-ce que la valeur de F' change ? Pourquoi cela justifie-il que la lentille n'est pas un système rigoureusement stigmatique ?

3.5 On se place dans les conditions de Gauss : qu'est-ce que cela signifie pour h ? Montrer alors que

$$f' \simeq e + \frac{R}{n - 1}$$

Est-ce que la lentille présente un stigmatisme approché dans ces conditions ?

3.6 **Réalisation d'un microscope avec un smartphone.** On dépose une goutte d'eau de rayon R sur l'objectif photographique d'un smartphone. On la modélise par une demi-boule de rayon $R = 1{,}0\,\text{mm}$ et d'indice de réfraction $n = 1,33$.

(a) Quel est le lien entre e et R dans ce cas particulier ? Calculer alors la valeur de la focale f' de la lentille.

(b) Rappeler ce qu'est le *punctum proximum* de l'œil, et donner sa valeur pour un individu moyen sans problème de vision.

(c) On observe un objet AB à l'œil nu. Quel est sa taille angulaire α, si on observe cet objet à une distance d ? Pour quelle valeur de d a-t-on une valeur maximale de α, que l'on notera α_m, tout en voyant net ?

(d) On rajoute maintenant la lentille-goutte d'eau entre l'œil et l'objet. Ou faut-il placer l'objet par rapport à la lentille pour voir son image sans devoir accommoder ? Dans ces conditions, que vaut la taille angulaire α' de l'objet vu à travers la lentille-goutte ?

(e) On définit le *grossissement commercial* d'un système optique par

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_m}$$

C'est cette valeur qu'on donne lorsqu'on dit qu'un instrument "grossit x fois l'objet". Exprimer G_c pour la lentille-goutte, en fonction de R, n et d_{pp}, puis calculer sa valeur numérique et la commenter.

Bonus popculture : la puissance de Darth Sidious

Darth Sidious est un puissant seigneur Sith, capable de créer des éclairs grâce au pouvoir du côté Obscur de la Force. Dans *Le retour du Jedi*, il électrise Luke Skywalker, alors situé à environ $5\,\mathrm{m}$ de lui, par salves de quelques secondes. Estimer l'énergie déployée par Sidious lors d'une salve d'éclairs, si on suppose que Luke subit une intensité électrique $I = 100\,\mathrm{mA}$ (potentiellement létale sur une durée prolongée). *En fait l'intensité que je donne est très faible pour un éclair : si le film était "réel" Luke se transformerait très vite en tas de cendres....*

Unlimited power !

Donnée : Champ électrique disruptif de l'air $E_d \simeq 36\,\mathrm{kV}\cdot\mathrm{cm}^{-1}$. C'est la différence de potentiel qu'il faut exercer entre deux points de l'atmosphère distants de $1\,\mathrm{cm}$ pour qu'il devienne conducteur électrique (et donc qu'une décharge se produise).