Devoir Surveillé 1 - Corrigé

Question de cours

Voir...le cours !

Exercice - Dimensions et électromagnétisme

1. (a) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ donc $\boxed{[\mathcal{E}] = [m][v^2] = ML^2T^{-2}}$.
   (b) $\mathcal{P} = \dfrac{d\mathcal{E}}{dt}$ donc $\boxed{[\mathcal{P}] = \dfrac{[\mathcal{E}]}{[t]} = ML^2T^{-3}}$.
   (c) $\mathcal{P} = UI$ donc $\boxed{[U] = \dfrac{[\mathcal{P}]}{[I]} = ML^2T^{-3}I^{-1}}$.
   (d) E se mesure en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, donc $\boxed{[E] = [U]L^{-1} = MLT^{-3}I^{-1}}$.
2. $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, donc on peut écrire
$$\varepsilon_0 = \frac{q}{4\pi E r^2}$$
En utilisant le fait que $[q] = IT$, $[r^2] = L^2$ et $[E] = MLT^{-3}I^{-1}$, on obtient
$$\boxed{[\varepsilon_0] = I^2T^4M^{-1}L^{-3}}$$
3. $F = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi d}$, donc on peut écrire
$$\mu_0 = \frac{2\pi d F}{i_1 i_2 l}$$
En utilisant le fait que $[d] = L$, $[F] = MLT^{-2}$ (ce qui vient de la seconde loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$), et $[i_1] = [i_2] = I$, on obtient
$$[\mu_0] = \frac{L\cdot MLT^{-2}}{I^2\cdot L} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{[\mu_0] = MLT^{-2}I^{-2}}$$
4. On peut supposer que $c = k\varepsilon_0^\alpha\mu_0^\beta$, avec k un nombre sans dimension et α et β à déterminer par analyse dimensionnelle. Comme $[c] = LT^{-1}$, l'homogénéité de l'équation se traduit par
$$LT^{-1} = (M^{-1}L^{-3}T^4I^2)^\alpha(MLT^{-2}I^{-2})^\beta = M^{-\alpha+\beta}L^{-3\alpha+\beta}T^{4\alpha-2\beta}I^{2\alpha-2\beta}$$
Il faut donc résoudre le système :
$$\begin{cases} 0 &= -\alpha+\beta \\ 1 &= -3\alpha+\beta \\ -1 &= 4\alpha-2\beta \\ 0 &= 2\alpha-2\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= \beta \\ 1 &= -2\alpha \\ -1 &= 2\alpha \\ \alpha &= \beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= -1/2 \\ \beta &= -1/2 \end{cases}$$
Et donc
$$\boxed{c = \frac{k}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$
5. On suppose que $k = 1$. L'application numérique donne alors, avec trois chiffres significatifs,
$$\boxed{c = 3{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$
ce qui correspond bien à la valeur que vous connaissez !

Problème 1 - Observation de la planète Mars (Bac Physique-Chimie)

Partie 1 : Observation de Mars avec une lunette astronomique

1. Voir l'annexe.
2. Une lunette afocale forme une image à l'infini d'un objet à l'infini. Il faut donc que l'image intermédiaire de l'étoile par la lentille L_1 se forme dans le plan focal objet de L_2. Comme l'étoile est à l'infini, cette image intermédiaire se forme dans le plan focal image de L_1. Il découle de tout cela que $F'1 = F_2$. Voir l'annexe pour les tracés.
3. Voir l'annexe.
4. $\boxed{G_{\text{lunette}} = \frac{f_1'}{f_2'} = 45}$.
5. $\theta < \varepsilon$, le pouvoir séparateur de l'œil : il est incapable de distinguer P_1 et P_2, qui paraîssent donc confondus.
6. $\boxed{\theta' = G_{\text{lunette}}\theta = 2{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}}$. $\theta' < \varepsilon$ :: on voit bien une planète circulaire dans la lunette.

Partie 2 : Détermination du diamètre de Mars

7. A : la taille angulaire de Mars est maximale, donc elle est au point le plus proche de la Terre. Cela correspond à $\boxed{\theta_1 = 1{,}16 \cdot 10^{-4}\,\text{rad}}$. B : θ est minimal, donc Mars est au plus loin de la Terre. Cela correspond à $\boxed{\theta_2 = 1{,}60 \cdot 10^{-5}\,\text{rad}}$.
8. On a :
$$\tan\frac{\theta_1}{2} = \frac{d_M/2}{D_1} \quad ; \quad \tan\frac{\theta_2}{2} = \frac{d_M/2}{D_2}$$
Dans l'approximation des petits angles, $\tan\theta \simeq \theta$ et cela vaut aussi pour $\theta/2$. Donc
$$\theta_1 = \frac{d_M}{D_1} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{d_M}{D_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} = \frac{D_1 + D_2}{d_M}$$
Or, $D_1 + D_2 = 2r_{SM}$, donc
$$\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} = \frac{2r_{SM}}{d_M} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_M = \frac{2r_{SM}}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}}}$$
9. L'application numérique donne $\boxed{d_M = 6{,}41 \cdot 10^3\,\text{km}}$, ce qui est assez proche de la valeur donnée. Les différences s'expliquent potentiellement par
   - Des erreurs sur les estimations de θ_1 et θ_2,
   - La définition rigoureuse de d_M, plus complexe, ainsi que la valeur fournie qui peut aussi être entâchée d'erreur.

Partie 3 : Détermination de la masse de Mars

10. On rédige *rigoureusement* !
    - *Système* : Phobos.
    - *Référentiel* : "marsocentrique", dont la référence est le centre de Mars.
    - *Bilan des forces* : seule la force de gravitation universelle $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{MP}^2}\vec{e}_n$, avec $\vec{e}_n$ le vecteur normal à la trajectoire de Phobos pointant vers l'extérieur (cf cours de terminale).

De plus, l'accélération de Phobos dans le repère de Frénet $(\vec{e}_n, \vec{e}_t)$ s'écrit:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t - \frac{v^2}{r_{MP}}\vec{e}_n$$

La seconde loi de Newton donne donc, avec v constante (et donc $dv/dt = 0$) :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{mv^2}{r_{MP}} = -\frac{GM_M m}{r_{MP}^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_M}{r_{MP}}}}$$

11. La relation précédente se réécrit

$$M_M = \frac{r_{MP}v^2}{G}$$

Il reste à relier v à la période T. Pour cela, on remarque que l'orbite a un périmètre $2\pi r_{MP}$, et ainsi

$$2\pi r_{MP} = vT \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{2\pi r_{MP}}{T}$$

et donc

$$\boxed{M_M = \frac{4\pi^2 r_{MP}^3}{GT^2}}$$

Remarque : c'est en fait la troisième loi de Kepler !

$$\frac{T^2}{r_{MP}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_M} = \text{cste}$$

L'application numérique donne $\boxed{M_M = 6{,}43 \cdot 10^{23}\,\text{kg}}$. Cette valeur est plausible : la masse de la Terre est $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \simeq 9M_M$. Le diamètre de Mars étant environ deux fois plus faible que celui de la Terre, son volume est donc environ $2^3 = 8$ fois plus faible. Comme la masse d'un astre est proportionnelle à son volume, M_M est ç peu près 8 fois moins massive que la Terre, si on suppose que les masses volumiques des deux planètes sont proches.

Problème 2 - Correction des aberrations chromatiques

Partie 1 - Réfraction par une lame de verre à faces parallèles

1.1. $n > n_a$ (car $n_a = 1$ et la loi de la réfraction donne $n_a \sin i = \sin i = n \sin r$, c'est-à-dire, par croissance de la fonction sinus sur $[0\,;\pi/2]$:

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} < \sin i \quad \Longrightarrow \quad \boxed{r < i}$$

r et α sont des angles alterne-interne de même signe (car orientés dans le sens trigonométrique tous les deux), donc $\boxed{\alpha = r}$. Enfin, la loi de la réfraction en J s'écrit :

$$n \sin\alpha = \sin\beta$$

et comme $\alpha = r$ et que $n \sin r = \sin i$, il vient

$$\sin r = \sin\beta \quad \Longrightarrow \boxed{\beta = r}$$

1.2. Pour qu'il puisse y avoir réflexion totale, il faut que l'indice du deuxième milieu (dans lequel évolue le rayon réfracté) soit inférieur à celui du premier milieu (dans lequel évolue le rayon incident). Ainsi, il ne peut pas y avoir de réflexion totale en I, mais il est possible qu'il y en ait une en J. Pour que ce soit le cas, il faudrait que α soit supérieur à l'angle limite de réfraction i_l, qui correspond à un angle $\beta = \pi/2$. Ainsi,

$$n \sin i_l = \sin \pi/2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sin i_l = \frac{1}{n}$$

Or, on peut majorer l'angle r, car $i < \pi/2$. Ainsi, par croissance de la fonction sinus et par la loi de la réfraction en I :

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} < \frac{\sin \pi/2}{n} \quad \Longrightarrow \quad \sin r < \frac{1}{n}$$

Ainsi, $\sin \alpha < 1/n$, et donc $\boxed{\alpha < i_l}$: il ne peut pas y avoir de réflexion totale en J.

1.3. Comme $\beta = i$, le rayon sortant de la lame de verre est parallèle au rayon entrant. On peut donc dire qu'il n'est pas dévié. Néanmoins, il semble provenir d'un point différent de S sur l'axe Δ : le rayon à été *translaté* lors de la traversée de la lame de verre.

1.4. On a déjà écrit ces lois dans les questions précédentes, mais on les rappelle :

$$\sin i = n \sin r \quad ; \quad n \sin \alpha = \sin \beta$$

(ce qui est en fait deux fois la même formule). En raisonnant dans le triangle IJH, on remarque que l'angle $\widehat{JIH}$ (orienté de $[IJ]$ vers $[JH]$) vaut $i - r$. La trigonométrie donne alors

$$\sin \widehat{JIH} = \frac{JH}{IJ} = \frac{d}{IJ}$$

Comme $\overline{IJ} = IJ$ (en orientant les distances), on obtient

$$\boxed{d = \overline{IJ} \sin(i - r)}$$

1.5. Soit K le projeté orthogonal de I sur la face inférieure de la lame. Le triangle IKJ ainsi formé est rectangle, et l'angle en I de ce triangle vaut r (à vous de vous en convaincre en faisant le schéma !). On souhaite enlever $\overset{\frown}{IJ}$ de la relation de la question précédente, qui est l'hypothénuse du triangle, et on connaît e, le côté adjacent à l'angle r dans ce même triangle. La fonction trigonométrique tout indiquée est donc cosinus :

$$\cos r = \frac{IK}{\overline{IJ}} = \frac{e}{\overline{IJ}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{IJ} = \frac{e}{\cos r}$$

et ainsi

$$\boxed{d = \frac{e \sin(i - r)}{\cos r}}$$

$d = 0$ dans le cas où $i = 0$, car on a alors aussi $r = 0$. L'autre cas extrême est celui où $i = \pi/2$, ce qui correspond à

$$d = \frac{e \sin(\pi/2 - r)}{\cos r} = \frac{e \cos r}{\cos r} = e$$

donc $\boxed{0 \leq d \leq e}$ (on peut discuter du fait que la deuxième inégalité est stricte, car i ne peut pas être strictement égal à $\pi/2$ dans l'expérience).

1.6. Conditions de Gauss (pour un système optique *centré*):

- Les rayons incidents sur le système optique sont peu inclinés par rapport à l'axe optique,
- les rayons incidents sur le système optique sont peu éloignés de l'axe optique.

Cela implique que $i << 1$ ici. Il découle des conditions de Gauss que, pour tout rayon dans ces conditions incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique,

$$\boxed{\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha \quad ; \quad \cos\alpha \simeq 1}$$

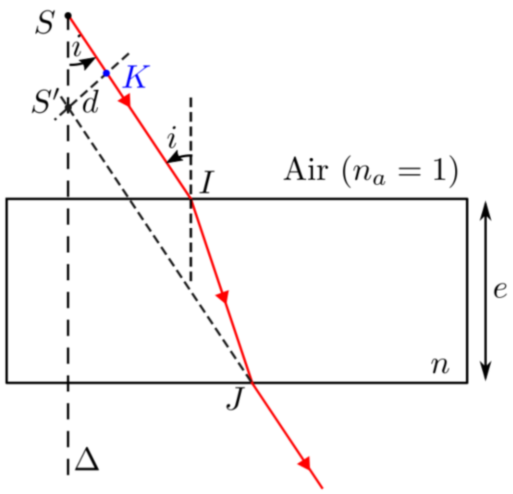
1.7. La loi de Snell-Descartes s'écrivant dans les conditions de Gauss

$$i = nr$$

si $i << 1$, r également et donc $i - r$ également. On en déduit que

$$d = \frac{e(i-r)}{1} = ei\left(1 - \frac{r}{i}\right) \implies \boxed{d = ei\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

1.8. Si le rayon arrive perpendiculairement sur la lame de verre, il n'y aura pas de déviation car $r = i = 0$.



Sur le schéma, on obtient le point S' en prolongeant le rayon sortant de la lame jusqu'à la droite Δ. En appelant K le projeté orthogonal de S' sur le rayon incident, $S'K = d$, et un peu de trigonométrie dans le triangle $SS'K$ donne, toujours dans les conditions de Gauss,

$$\sin i = i = \frac{S'K}{SS'} = \frac{d}{SS'}$$

Algébriquement, $SS' = \overline{SS'}$ vu le sens de la marche des rayons, et en remplaçant d par son expression,

$$\boxed{\overline{SS'} = \frac{d}{i} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Si e augmente, $\overline{SS'}$ augmente, ce qui est cohérent physiquement : une lame plus épaisse translatera davantage le rayon de sortie par rapport au rayon incident. Si n augmente, $\overline{SS'}$ augmente également : la réfraction étant plus marquée, le rayon de sortie sera d'autant plus dévié.

1.10. L'application numérique donne

$$\overline{SS'} = 3\,\text{mm}$$

ce qui est négligeable devant le mètre de distance qui vous sépare de votre camarade : la vitre a peu d'incidence sur ce que vous voyez !

Partie 2 - Dispersion et aberration chromatique

2.1. n étant sans dimension, $\boxed{A \text{ est sans dimension}}$ et $\boxed{[B] = [\lambda^2] = L^2}$.

2.2. $\lambda_b < \lambda_r$ donc $\boxed{n_b > n_r}$: l'indice de réfraction est plus grand pour la lumière bleue que la lumière rouge.

2.3. La loi de Cauchy s'écrit, pour chaque longueur d'onde,

$$(1) \quad n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} \quad ; \quad (2) \quad n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}$$

On peut alors faire une combinaison linéaire des deux équations, de sorte à supprimer les termes en B :

$$\lambda_1^2 \cdot (1) - \lambda_2^2 \cdot (2) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1^2 n_1 - \lambda_2^2 n_2 = \lambda_1^2 A + B - \lambda_2^2 A - B = \lambda_1^2 A - \lambda_2^2 A$$

dont il découle que

$$\boxed{A = \frac{\lambda_1^2 n_1 - \lambda_2^2 n_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}}$$

On aurait aussi pu utiliser la première loi pour déterminer A en fonction de n_1, λ_1 et B, puis la deuxième pour exprimer B en fonction de A, n_2 et λ_2, puis remplacer l'expression de B dans la première et isoler A. C'est un peu plus fastidieux, mais tout aussi correct !

Application numérique pour les deux verres :

$$\boxed{A(crown) = 1,504 \quad ; \quad A(flint) = 1,596}$$

2.4. On peut faire une autre combinaison linéaire pour éliminer A : il suffit de soustraire les deux équations.

$$(1) - (2) \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 - n_2 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} - A - \frac{B}{\lambda_2^2} = B\left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right)$$

et donc

$$\boxed{B = \frac{n_1 - n_2}{\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}} = \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}(n_1 - n_2)}$$

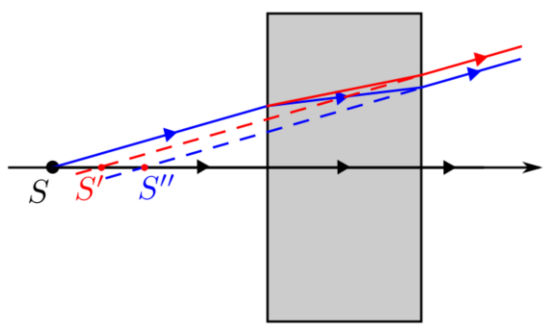
L'application numérique donne, pour les deux verres :

$$\boxed{B(crown) = 4{,}711 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}^2 \quad ; \quad B(flint) = 9{,}422 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}^2}$$

2.5. Il suffit de faire l'application numérique avec les valeurs de A et B obtenues avec les deux verres :

$$\boxed{n_3(crown) = 1,518 \quad ; \quad n_3(flint) = 1,623}$$

2.6. *Schéma pour les questions 2.6. et 2.7., avec les couleurs adéquates.*



L'image S' est virtuelle.

2.7. S'' est également une image virtuelle, qui n'est pas confondue avec S'. L'observateur verra donc un "flou de couleur", les images dues aux différentes composantes de la lumière de S se formant à des positions différentes. C'est l'*aberration chromatique*.

2.8. On obtient avec la "relation de Chasles" pour les distances algébriques que

$$\mathcal{L} = \overline{S'S''} = \overline{S'S} + \overline{SS''} = -\overline{SS'} + \overline{SS''}$$

Or,

$$\overline{SS'} = e\left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \quad ; \quad \overline{SS''} = e\left(1 - \frac{1}{n_2}\right)$$

et donc

$$\mathcal{L} = e\left(1 - \frac{1}{n_1} - 1 + \frac{1}{n_2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{L} = e\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)}$$

On peut utiliser la loi de Cauchy pour éliminer n_1 et n_2 en faveur de A, B et des longueurs d'onde :

$$\mathcal{L} = e\left(\frac{1}{A + \frac{B}{\lambda_1^2}} - \frac{1}{A + \frac{B}{\lambda_2^2}}\right) = \frac{eB\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right)}{\left(A + \frac{B}{\lambda_1^2}\right)\left(A + \frac{B}{\lambda_2^2}\right)} = \frac{eB(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1^2 + B)(\lambda_2^2 A + B)}$$

$\mathcal{L}$ représente la distance entre les images "bleue" et "rouge", et donc l'étendue de l'aberration chromatique. Plus $\mathcal{L}$ est élevée, et plus les aberrations chromatiques sont fortes. L'application numérique donne

$$\frac{\mathcal{L}(\textit{crown})}{e} = 3,898 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \frac{\mathcal{L}(\textit{flint})}{e} = 6,800 \cdot 10^{-3}$$

Le verre *flint* présente donc les plus fortes aberrations.

Partie 3 - Correction des aberrations chromatiques pour des lentilles minces

3.1. λ_C est dans le rouge, λ_D dans le vert-jaune, λ_F dans le bleu. λ_D se situe approximativement au milieu du spectre visible, et entre les deux longueurs d'onde "extrêmes" λ_C et λ_F, d'où le nom.

3.2. f' dépend de n, et n de la longueur d'onde, donc f' dépend de la longueur d'onde. Comme la position de l'image par une lentille dépend de la valeur de f', elle dépendra aussi de la longueur d'onde, ce qui cause des aberrations chromatiques si on éclaire la lentille avec de la lumière blanche.

3.3.

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

3.4. L'objet A étant à l'infini sur l'axe optique, son image A_1 par la première lentille L_1 est confondue avec le foyer principal image F_1' de cette lentille. On a donc

$$\overline{OA_1} = \overline{OF_1'} = f_1'$$

On détermine la position de A_2 par rapport à O avec la relation de conjugaison appliquée à la deuxième lentille :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f_2'} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}}$$

3.5. A_2 est l'image d'un objet situé à l'infini sur l'axe optique par l'ensemble des deux lentilles. Par définition, A_2 se situe donc au point focal image de l'ensemble : cela signifie que $\overline{OA_2} = f'$. Il découle immédiatement de la question précédente que

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}}$$

3.6. En utilisant la relation $\frac{1}{f'_k} = \rho_k(n_k - 1)$ pour les deux lentilles,

$$\frac{1}{f'} = \rho_1(n_1 - 1) + \rho_2(n_2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f' = \frac{1}{\rho_1(n_1 - 1) + \rho_2(n_2 - 1)}}$$

f' dépend de la longueur d'onde, car n_1 et n_2 en dépendent.

3.7. $\boxed{V = \frac{1}{f'}}$. En utilisant l'expression de la focale d'une lentille en fonction de ρ et n pour la longueur d'onde λ_D, on a immédiatement

$$V_D = \rho(n_D - 1) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \rho_1 &= \dfrac{V_{1,D}}{n_{1,D} - 1} \\ \rho_2 &= \dfrac{V_{2,D}}{n_{2,D} - 1} \end{cases}}$$

3.8. Pour le doublet, avec la relation $V = V_1 + V_2$,

$$\boxed{\begin{cases} V_C &= \rho_1(n_{1,C} - 1) + \rho_2(n_{2,C} - 1) \\ V_D &= \rho_1(n_{1,D} - 1) + \rho_2(n_{2,D} - 1) \\ V_F &= \rho_1(n_{1,F} - 1) + \rho_2(n_{2,F} - 1) \end{cases}}$$

3.9. En utilisant la définition de ΔV et ce qui précède,

$$\Delta V = \rho_1(n_{1,F} - 1) + \rho_2(n_{2,F} - 1) - \rho_1(n_{1,C} - 1) + \rho_2(n_{2,C} - 1) = \rho_1(n_{1,F} - n_{1,C}) + \rho_2(n_{2,F} - n_{2,C})$$

puis en utilisant les expressions de ρ_1 et ρ_2,

$$\Delta V = \frac{V_{1,D}}{n_{1,D} - 1}(n_{1,F} - n_{1,C}) + \frac{V_{2,D}}{n_{2,D} - 1}(n_{2,F} - n_{2,C})$$

Et enfin, en introduisant les nombre d'Abbe

$$\nu_1 = \frac{n_{F,1} - n_{C,1}}{n_{D,1} - 1} \quad ; \quad \nu_2 = \frac{n_{F,2} - n_{C,2}}{n_{D,2} - 1}$$

on obtient

$$\boxed{\Delta V = \frac{V_{1,D}}{\nu_1} + \frac{V_{2,D}}{\nu_2}}$$

3.10. Pour que les images formées par les raies F et C soient confondues, il faut que le doublet ait la même vergence pour ces deux longueurs d'onde. Cela implique que

$$\boxed{\frac{V_{1,D}}{\nu_1} + \frac{V_{2,D}}{\nu_2} = 0}$$

3.11. La relation précédente donne

$$V_{D,2} = -\frac{V_{D_1}\nu_2}{\nu_1}$$

De plus, pour le doublet, $V_D = V_{D,1} + V_{D,2}$, et donc $V_{D,2} = V_D - V_{D,1}$. En combinant ces deux relations,

$$V_D - V_{D,1} = -\frac{V_{D_1}\nu_2}{\nu_1} \quad \Longrightarrow \quad V_{D,1}\left(1 - \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) = V_D \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_{D,1} = \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}V_D}$$

et on obtient la deuxième relation en utilisant le fait que

$$V_{D,2} = V_D - V_{D,1} = V_D\left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_{D,2} = -\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}V_D}$$

Il est impossible de satisfaire à ces deux conditions si $\nu_1 = \nu_2$ (car $V_{1,D}$ et $V_{2,D}$ ne seraient alors pas définies, en fait elles seraient infinies et donc les focales nulles...ce qui implique la même chose pour V_D). Il est donc obligatoire d'utiliser deux verres différents pour corriger les aberrations chromatiques.

3.12. Si on veut corriger une lentille convergente, $V_{1,D} > 0$. Il est alors nécessaire que $V_{D,2} < 0$: il faut utiliser une lentille divergente.

3.13. Si le doublet est achromatique et de focale f',

$$V_D = \frac{1}{f'} = 5{,}0\,\delta$$

On peut déterminer les nombres d'Abbe pour chaque type de verre :

$$\nu_c = \frac{n_{D,c} - 1}{n_{F,c} - n_{C,c}} = 57,56 \quad ; \quad \nu_f = \frac{n_{D,f} - 1}{n_{F,f} - n_{C,f}} = 34,61$$

Il reste a utiliser les relations de la question 3.11, la lentille L_1, convergente, étant en *crown*, et la lentille L_2, divergente, en *flint* :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} V_{1,D} & = \dfrac{\nu_c}{\nu_c - \nu_f}V_D = 13\,\delta \\ \\ V_{2,D} & = -\dfrac{\nu_f}{\nu_c - \nu_f}V_D = -7{,}5\,\delta \end{array}\right.}$$

Attention aux chiffres significatifs ici : le facteur limitant la précision est V_D avec deux chiffres !

Bonus

1. Une pièce de 10 centimes d'euros fait environ $1\,\mathrm{cm}$ de diamètre et $1\,\mathrm{mm}$ d'épaisseur. On peut modéliser la maison par un parallélépipède rectangle de hauteur $h \simeq 2{,}5\,\mathrm{m}$ et de surface au sol $S = 120\,\mathrm{m}^2 \simeq 10\,\mathrm{m} \times 12\,\mathrm{m}$. On peut répartir, au sol de la maison, une "couche" de pièces rectangulaire, chacune occupant un espace carré de $1\,\mathrm{cm}$ de côté, c'est à dire

$$1 \text{ couche de pièces} = 1200 \times 1000 = 1,2 \cdot 10^6 \text{ pièces}$$

On peut empiler ces couches jusqu'au plafond, ce qui correspond à $2,5 \cdot 1000 = 2500$ couches de pièces. Ainsi, au total, on peut rentrer méthodiquement dans la maison

$$N = 1,2 \cdot 10^6 \times 2500 = 3 \cdot 10^9 \text{ pièces}$$

pour un montant total de 300 millions d'euros ! C'est bien supérieur au prix de la maison (et ça le reste, même en remplaçant les pièces par des pièces de 1 centime et en supposant qu'elles font la même taille).

2. On peut faire un raisonnement similaire pour le coffre de Picsou, de base carrée de 40 mètres de côté et rempli par une profondeur d'or de 90 pieds d'après la photo. Un pied correspondant environ à $30\,\mathrm{cm}$, cela fait une profondeur de $90 \cdot 0,3 = 27\,\mathrm{m}$. Si on empile méthodiquement des pièces de 10 centimes identiques à celle de la question précédente (la pièce la plus connue de Picsou est son *sou fétiche*, appelé en anglais *lucky dime*, une dime étant égale à 0,1 dollar américain, et les pièces du coffre y ressemblant fortement), on peut mettre 27×1000 couches de pièces de $40 \times 100 = 40000$ pièces de côté.On obtient un montant total de

$$40000 \times 40000 \times 27000 \times 0,1 = 4 \cdot 10^{12}\ \$$$

C'est à dire 4000 milliards de dollars : à comparer avec les 140 milliards de Bill Gates. *Bien évidemment, il n'y a pas que des pièces dans le coffre : c'est un ordre de grandeur ! Et paradoxalement, même la présence de quelques lingots d'or ou de pierres précieuses risque d'être éclipsée par la quantité monstrueuses de pièces, même de petite valeur !*

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE I

La lunette astronomique peut-être modélisée par le schéma ci-dessous qui n'est pas à l'échelle.

L_1 : ...Objectif...........

L_2 : ...Oculaire......