

DM8 - Corrigé

Partie 1 - Équation de Lane-Emden

$$1) PV = nRT \Rightarrow P = \frac{n}{V} \cdot RT = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{M} = \rho \frac{RT}{M} = \rho \frac{k_B T}{\mu}$$

car $R = N_A k_B$ et $M = \mu N_A$ (μ = masse d'une seule particule)

$$2) \kappa \rho^\gamma = \frac{\rho k_B T}{\mu} \Rightarrow T = \frac{\mu \kappa}{k_B} \rho^{\gamma-1}$$

$$3) \kappa = \frac{k_B T}{\mu \rho^\gamma} = \frac{k_B T}{\mu \rho^{\gamma-1}} \text{ donc au centre de l'étoile (car } \kappa = \text{cte)} \Rightarrow \kappa = \frac{k_B T_c}{\mu \rho_c^{\gamma-1}}$$

$$1) a) \vec{g} \text{ rad } P = \rho \vec{g}, \text{ sphériques ici}$$

b) Car symétrie sphérique ($\Leftrightarrow$ invariance par rotation de θ/φ)

$$c) \text{ on compare } P_{\text{oids}} = m g(n) \text{ et } F = - \frac{G M(n) m}{n^2}$$

$$\Rightarrow g(n) = \frac{G M(n)}{n^2}$$

$$d) M(n) = \iiint_{\text{boule de rayon } n} \rho dV = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\tilde{r}=0}^n \rho(\tilde{r}) \sin \theta \tilde{r}^2 d\tilde{r} d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\tilde{r}=0}^n \rho(\tilde{r}) \left[\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right] \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$

$$M(n) = \int_{\tilde{r}=0}^n 4\pi \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r}$$

$$e) \text{ Si on dérive } M(n): \frac{dM}{dn} = 4\pi n^2 \rho(n) \text{ (car primitive de } 4\pi n^2 \rho)$$

$$\text{Eq. hydrostatique: } \vec{g} \text{ rad } P = \rho \vec{g} = -\rho g \hat{e}_r$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dn} = -\rho g(n) = -\rho \frac{G}{n^2} M(n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{\rho} \frac{dP}{dn} = -G M(n)$$

$$\text{on dérive pour faire apparaître } \frac{dM}{dn}: \frac{d}{dn} \left(\frac{n^2}{\rho} \frac{dP}{dn} \right) = -G \frac{dM}{dn} = -4\pi G n^2 \rho$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} \left(\frac{n^2}{\rho} \frac{dP}{dn} \right) = -4\pi G \rho(n)$$

$$5) a) P = \kappa \rho^\gamma \Rightarrow P = \rho_c^\gamma \kappa \theta^{\gamma/\gamma-1}$$

$$\text{Bonne } T = \frac{\mu \kappa}{k_B} \rho^{\gamma-1} = \frac{\mu \kappa \rho_c}{k_B} \cdot \theta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow \theta = \frac{k_B}{\mu \kappa \rho_c^{\gamma-1}} T$$

θ est en fait une "température adimensionnée" ! (D'où le choix de θ , qui est le "t" grec)

$$b) \frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} \left(\frac{n^2}{\rho} \kappa \frac{d(\rho^\gamma)}{dn} \right) = -4\pi G \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} \left(\frac{n^2}{\rho} \kappa \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dn} \right) = -4\pi G \rho$$

$$c) \frac{df}{dn} = \frac{df}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dn} \text{ or, } \xi = \alpha n \Rightarrow \frac{d\xi}{dn} = \alpha \text{ donc } \frac{df}{dn} = \alpha \frac{df}{d\xi}$$

d) On remplace p par θ dans l'équation, avec
 $p^{r-1} = p_c^{r-1} \theta^{\frac{r-1}{r-1}} = p_c^{r-1} \theta$, et $p = p_c \theta^{\frac{1}{r-1}}$

$$\frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} \left(\frac{n^2}{p_c \theta^{\frac{1}{r-1}}} \cdot \kappa \gamma p_c^{r-1} \theta \cdot \frac{d}{dn} \left(p_c \theta^{\frac{1}{r-1}} \right) \right) = -4\pi \gamma p_c \theta^{\frac{1}{r-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} \left(\frac{n^2}{\theta^{\frac{1}{r-1}}} \cdot \kappa \gamma p_c^r \theta \cdot \frac{1}{r-1} \theta^{\frac{1}{r-1}-1} \frac{d\theta}{dn} \right) = -4\pi \gamma p_c \theta^{\frac{1}{r-1}}$$

En passant toutes les constantes à gauche hors de la dérivée,
 $\frac{\kappa \gamma p_c^{r-2}}{4\pi \gamma (r-1)} \cdot \frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} \left(n^2 \cdot \frac{1}{\theta^{\frac{1}{r-1}}} \cdot \theta^{\frac{1}{r-1}} \frac{d\theta}{dn} \right) = -\theta^{\frac{1}{r-1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa \gamma p_c^{r-2}}{4\pi \gamma (r-1)} \cdot \frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} \left(n^2 \frac{d\theta}{dn} \right) = -\theta^{\frac{1}{r-1}}$$

Pour enlever la constante, on va choisir judicieusement $\xi = \alpha n$
 en remplaçant $\frac{d}{dn} = \frac{d\xi}{dn} \frac{d}{d\xi} = \alpha \frac{d}{d\xi}$

$$\frac{\kappa \gamma p_c^{r-2}}{4\pi \gamma (r-1)} \cdot \frac{\alpha^r}{\xi^2} \cdot \alpha \frac{d}{d\xi} \left(\left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^2 \cdot \alpha \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^{\frac{1}{r-1}}$$

Donc, si on pose $\alpha^2 = \frac{4\pi \gamma (r-1)}{\kappa \gamma p_c^{r-2}}$, les constantes disparaissent.

Ainsi : $\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^{\frac{1}{r-1}} = 0$ avec $\xi = n \sqrt{\frac{4\pi \gamma (r-1)}{\kappa \gamma p_c^{r-2}}}$

e) Si on connaît $\theta(\xi)$, on remplace $\xi = \alpha n \Leftrightarrow n = \frac{\xi}{\alpha}$
 et : $\begin{cases} p(n) = p_c \theta(\alpha n) \\ p(n) = \kappa p(n)^r = \kappa p_c^r \theta(\alpha n) \\ T(n) = \frac{\mu p(n)}{\kappa_B p(n)} = \frac{\mu \kappa p_c^r \theta(\alpha n)}{\kappa_B p_c \theta(\alpha n)^{\frac{1}{r-1}}} = \frac{\mu \kappa p_c^{r-1}}{\kappa_B} \theta(\alpha n) \end{cases}$

Partie 2 - Résolution de l'équation de Lane-Emden

6) $\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = 2\xi \frac{d\theta}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2\theta}{d\xi^2}$

Donc : $\frac{1}{\xi^2} \left(2\xi \frac{d\theta}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \right) + \theta^{\frac{1}{r-1}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^{\frac{1}{r-1}} = 0$

7) Equation non linéaire à cause de $\theta^{\frac{1}{r-1}} \dots$ (et en plus coeff. non const)

Bonus : Solutions pour $r = \infty$ et $r = 2$:

$r = \infty \Leftrightarrow \theta^{\frac{1}{r-1}} = 1$, donc $\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \Leftrightarrow \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = A - \frac{\xi^3}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{A}{\xi^2} - \frac{\xi}{3} \Leftrightarrow \theta(\xi) = B - \frac{A}{\xi} - \frac{\xi^2}{6}$

$r = 2$: $\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta = 0$. On pose $\varphi = \xi \theta \Leftrightarrow \frac{\varphi}{\xi} = \theta$

$\Rightarrow \theta' = \frac{\varphi' \xi - \varphi}{\xi^2}$, $\theta'' = \frac{(\varphi'' \xi + \varphi' - \varphi') / \xi^2 - 2\xi(\varphi' \xi - \varphi)}{\xi^4}$
 $= \frac{\varphi''}{\xi} - \frac{2\varphi'}{\xi^2} + \frac{2\varphi}{\xi^3}$

Donc : $\frac{\varphi''}{\xi} - \frac{2\varphi'}{\xi^2} + \frac{2\varphi}{\xi^3} + \frac{2}{\xi^3} (\varphi' \xi - \varphi) + \frac{\varphi}{\xi} = 0 \Leftrightarrow \varphi'' + \varphi = 0$

Donc $\varphi(\xi) = A \cos \xi + B \sin \xi \Leftrightarrow \theta(\xi) = \frac{A \cos \xi}{\xi} + \frac{B \sin \xi}{\xi}$

Donc $\gamma = 6/5 \dots \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^5 = 0$. Pas mal de bidouille
 amené $\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^{2/3}}}$ comme une solution possible.

Shambhukanth Srivastava, A new solution of the Lane - Emden equation of index $n=5$, publié en 1962 dans The Astrophysical Journal, propose la solution $\theta = \frac{\sin(\ln \xi)}{\sqrt{3-2\sin^2(\ln \xi)}}$ après deux changements de variable.

b) a) $M(1) = \int_0^1 4\pi \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r} = 4\pi \int_0^1 \tilde{r}^2 \rho_c \theta^{1/\gamma-1} d\tilde{r}$

Si on intègre jusqu'à $r=R$, et qu'on fait le chgt de variable $\tilde{r} \rightarrow \xi = \alpha \tilde{r}$ avec $d\tilde{r} = \frac{d\xi}{\alpha}$: $M = 4\pi \int_0^{\xi_0} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^2 \rho_c \theta^{1/\gamma-1} \cdot \frac{d\xi}{\alpha}$

$\Rightarrow M = \frac{4\pi \rho_c}{\alpha^3} \int_0^{\xi_0} \xi^2 \theta^{1/\gamma-1}(\xi) d\xi$

b) D'après l'éq. de Lane-Emden: $\theta^{1/\gamma-1} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)$

donc $M = \frac{4\pi \rho_c}{\alpha^3} \int_0^{\xi_0} -\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi$
 $= \frac{4\pi \rho_c}{\alpha^3} \left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_0^{\xi_0}$
 $= 0$

$M = -\frac{4\pi \rho_c}{\alpha^3} \left(\xi_0^2 \frac{d\theta}{d\xi}(\xi=\xi_0) \right) = \frac{4\pi \rho_c}{\alpha^3} \varphi(\xi_0)$

9) $\gamma = 1 + \frac{1}{2} = 2$, on obtient odeint pour intégrer une eq du second ordre, décompose en 2 eq du premier ordre: $\begin{cases} y_0 = \theta \\ y_1 = \theta' \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -\frac{2}{\xi} y_1 - y_0^2 \end{cases}$ rôle de la f^{on} "équation"

Le programme trace $\theta(\xi)$, et le cherche $f(\xi)=0$ pour chercher l'annulation première de θ graphiquement.

Partie 3 - Solution d'Eddington et température du Soleil

10) Frontière Soleil - Espace: lorsque $p=0$ (car l'espace est vide) $\begin{cases} p(r) > 0: \text{Etoile} \\ p(r)=0: \text{Espace} \end{cases}$ Donc on cherche la première annulation de p

annulation de $p \Leftrightarrow$ première annulation de θ
 $\Rightarrow R = \frac{\xi_0}{\alpha}$ avec ξ_0 la plus petite valeur de ξ tq $\theta(\xi_0)=0$

11) on lit graphiquement $\xi_0 = 6.9$

Remarque: C'est un peu grossier... On aurait dû faire une dichotomie mais je n'ai pas voulu vous traumatiser pour le premier avec du numérique!

12) D'après la question 3: $T_c = \frac{\mu k_B \rho_c}{\gamma}$

Donc: $R = \xi_0 \sqrt{\frac{\gamma}{4\pi g(\gamma-1)\rho_c}} \cdot k_B \rho_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \xi_0 \sqrt{\frac{\gamma}{4\pi g(\gamma-1)\rho_c}} \cdot \frac{k_B T_c}{\mu}$

$\Rightarrow T_c = \frac{4\pi g \mu (\gamma-1) \rho_c R^2}{\gamma k_B \xi_0^2}$

13) AN : $T_c = 1,8 \cdot 10^7 \text{ K} \approx 18 \text{ millions de K.}$

C'est assez proche de la valeur admise!

$$14) P_c = \frac{\rho_c k_B T_c}{\mu} = \underline{2,1 \cdot 10^{16} \text{ Pa}}$$

$$15) M = \frac{4\pi \rho_c}{\alpha^3} \varphi(\xi_0) = 4\pi \rho_c \left(\frac{\gamma \mu \rho_c}{4\pi \xi (\gamma-1)} \right)^{3/2} \varphi(\xi_0)$$

$$= 4\pi \rho_c \left(\frac{\gamma P_c}{4\pi \xi (\gamma-1) \rho_c^2} \right)^{3/2} \varphi(\xi_0)$$

$$M = \frac{4\pi}{\rho_c^2} \left(\frac{\gamma P_c}{4\pi \xi (\gamma-1)} \right)^{3/2} \varphi(\xi_0) = \underline{2,6 \cdot 10^{30} \text{ kg}}$$

Bon ordre de grandeur (un peu surestimé, car T_c , et donc P_c , un peu surestimés)