

DM 8 - Thermodynamique et statique des fluides

Rédiger les réponses aux questions de ce sujet sur **copies doubles**. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. S'agissant d'un devoir maison, n'hésitez pas à travailler avec votre cours à portée de main, mais assurez-vous d'y réfléchir par vous-mêmes !

Date limite : Vendredi 2 mai.

Sphères en équilibre hydrostatique : un modèle simple d'étoile

L'objectif de cet exercice est de modéliser simplement les étoiles, comme des sphères en équilibre hydrostatique. Dans la partie 1, on applique l'équation fondamentale de l'hydrostatique pour trouver une équation différentielle dont la pression P est solution, sans faire aucune hypothèse sur l'équation d'état. Puis, dans les parties 2 et 3, on utilise une équation d'état puis on résout l'équation différentielle (numériquement) pour déterminer $P(r)$ (ou $\rho(r)$), et en déduire des paramètres physiques comme la température ou la pression au centre de l'étoile.

Données : Dans tout le problème, on fait l'hypothèse que l'étoile est constitué d'un gaz parfait (si, si). On donne également les constantes physiques suivantes :

- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Masse d'un nucléon : $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
- Rayon du Soleil : $R = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Partie I - Equation de Lane-Emden

1. Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait, et justifier qu'elle peut s'écrire avec la masse volumique ρ et la masse des particules qui constituent l'étoile μ :

$$P = \frac{\rho k_B T}{\mu}$$

2. Dans ce problème, nous allons supposer que les étoiles sont en *équilibre polytropique*, c'est-à-dire que leur équation d'état se réécrit sous la forme :

$$P = \kappa \rho^\gamma$$

avec γ la *constante polytropique*, et κ une constante. Dans ce modèle, et si l'étoile est constituée d'un gaz parfait, quelle est la relation entre ρ et la température T ?

3. Montrer que, dans ce modèle, on a, en notant T_c et ρ_c la température et la masse volumique au centre de l'étoile :

$$\kappa = \frac{k_B T_c}{\mu \rho_c^{\gamma-1}}$$

4. Equation d'équilibre hydrostatique.

- (a) Rappeler l'équation fondamentale de l'hydrostatique. Dans quel système de coordonnées est-il préférable de se placer ici ?
- (b) On suppose que la pression dépend que de la coordonnée radiale : $P = P(r)$. Pouvez-vous le justifier physiquement ?

- (c) On suppose que seule la force de gravitation universelle et les forces de pression s'appliquent à une particule fluide M . De plus, on admet¹ qu'on peut modéliser la force de gravitation par l'équivalent volumique

$$\vec{f}_{V,g} = -\rho(r)g(r)\vec{e}_r$$

avec $g(r)$ le champ de pesanteur **dû uniquement à la boule de matière de rayon r située "sous" M** . Autrement dit, la masse "au-dessus" de M ne contribue pas. Exprimer $g(r)$ en fonction de G , r et $M(r)$, la masse de la boule de rayon r située sous M .

- (d) Justifier que :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r}$$

- (e) Dédurre, des questions précédentes, que :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r)$$

5. Adimensionnement : équation de Lane-Emden.

- (a) L'équation précédente n'est encore "brute de décoffrage". Pour la mettre en forme, on fait un changement de variable en introduisant la fonction sans dimension θ définie par :

$$\rho = \rho_c \theta^{1/(\gamma-1)}$$

avec ρ_c la masse volumique au centre de l'étoile. Exprimer P en fonction de θ et de constantes.
Bonus : quel est le lien entre θ et T ?

- (b) Remplacer P par ρ dans l'équation de la question 4.(e).
 (c) Pour terminer l'adimensionnement, on pose $\xi = \alpha r$ et on va chercher α pour faire disparaître les constantes. Justifier que, pour toute fonction f de r :

$$\frac{df}{dr} = \alpha \frac{df}{d\xi}$$

- (d) Dédurre de ce qui précède et en choisissant judicieusement α que θ est solution de l'équation de Lane-Emden :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0 \quad ; \quad \xi = \alpha r = r \sqrt{\frac{4\pi G(\gamma-1)}{\gamma \kappa \rho_c^{\gamma-2}}}$$

- (e) Supposons qu'on ait résolu l'équation de Lane-Emden et trouvé la fonction $\theta(\xi)$. Comment peut-on remonter à $\rho(r)$, $P(r)$ et $T(r)$?

Partie 2 - Résolution de l'équation de Lane-Emden

6. Montrer qu'on peut réécrire l'équation de Lane-Emden comme :

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0$$

7. A votre avis, pourquoi est-ce impossible de résoudre dans le cas général cette équation ? En fait, on ne peut résoudre l'équation à la main que pour $\gamma = \infty$, $\gamma = 2$ et $\gamma = 6/5$. Les plus curieux pourront essayer de résoudre les deux premiers cas, le cas $\gamma = 6/5$ est vraiment pas simple !
 8. On peut quand même exprimer la masse de l'étoile en fonction de θ .

¹C'est une conséquence du théorème de Gauss gravitationnel, voir cours de physique de PC.

(a) Montrer que, en posant $\xi_0 = \xi(r = R)$:

$$M = \frac{4\pi\rho_c}{\alpha^3} \int_0^{\xi_0} \xi^2 \theta^{1/(\gamma-1)} d\xi$$

(b) En déduire que :

$$M = \frac{4\pi\rho_c}{\alpha^3} \varphi(\xi_0) \quad ; \quad \varphi(\xi) = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}$$

Pour résoudre l'équation dans le cas général, on a recours à l'outil numérique. On écrit le code suivant dans un éditeur Python (code disponible pour copier-coller dans votre éditeur sur la page web du cours de PCSI, ou alors sur la version .pdf de ce sujet) :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as sp

n=1 # gamma = 1 + 1/n.
#On évite **(1/(gamma-1)), Python n'aime pas trop les puissances compliquées.

def equation(theta,xi):
    return (theta[1],-2/xi*theta[1]-theta[0]**n)

xi=np.linspace(0.001,10,1000)

theta0=1
theta_prime0=0
theta_ini=(theta0,theta_prime0)
theta_sol = sp.odeint(equation,theta_ini,xi)

plt.close()
plt.plot(xi,theta_sol[:,0])
plt.plot(xi,xi/xi-1)
```

9. Expliquer le fonctionnement du code. En particulier :

- Quelle est la "version" de l'équation qui est résolue ici (valeur de γ)
- Les trois lignes d'import.
- Ce que représente la fonction `equation`.
- Quelles sont les deux courbes tracées par le programme.

Vous êtes vivement encouragée à jouer avec le code et résoudre l'équation dans diverses situations !

Partie 3 - Solution d'Eddington, température du Soleil

Arthur Eddington, en 1926, propose un modèle hydrostatique pour décrire le Soleil. Il aboutit à une équation de Lane-Emden avec $\gamma = 4/3$. L'objectif de cette partie est d'utiliser le programme de la partie précédente et de déterminer la température au centre du Soleil.

10. On cherche d'abord à exprimer le rayon R du Soleil à l'aide des données du problème. Justifier que

$$R = \frac{\xi_0}{\alpha} = \xi_0 \sqrt{\frac{\gamma \kappa \rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)}}$$

avec ξ_0 la plus petite valeur de ξ pour laquelle $\theta(\xi_0) = 0$.

11. A l'aide du programme de la partie 2, déterminer la valeur de ξ_0 pour le modèle d'Eddington.
12. En déduire que la température au centre du Soleil est donnée par :

$$T_c = \frac{4\pi G \mu (\gamma - 1) R^2 \rho_c}{\gamma k_B \xi_0^2}$$

13. Faire l'application numérique, sachant que pour le cœur du Soleil, $\mu = 0,68m_p$ (le facteur tient compte de l'ionisation des molécules), et que la masse volumique au cœur du Soleil est $\rho_c \sim 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Commenter la valeur obtenue, et la comparer avec la valeur communément acceptée de $T_c = 1,4 \cdot 10^7 \text{ K}$.
14. En déduire la pression P_c au centre du Soleil.
15. On obtient, avec la solution numérique, $\varphi(\xi_0) = 2,01$. Calculer la masse du Soleil dans le modèle d'Eddington, et comparer avec la valeur "réelle" $M_S = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
16. On a obtenu la valeur de $\varphi(\xi_0)$ par dichotomie : expliquer le principe de la méthode, et proposer un programme Python permettant d'obtenir cette valeur.

En fait, le modèle du gaz parfait n'est pas adapté : il faut tenir compte à la fois de la pression du plasma, mais aussi de la pression de radiation des photons. En particulier, la valeur de ρ_c que j'ai proposé est un peu erronée, la vraie valeur étant proche de $1,50 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le modèle d'Eddington prévoit une valeur correcte de T_c , et des autres grandeurs physiques.