DM 7 - Moment cinétique

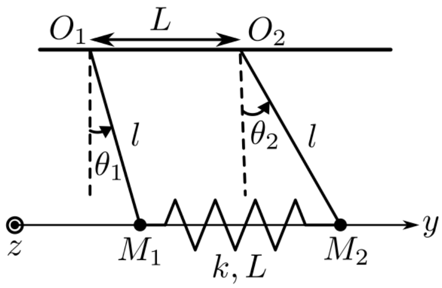
Rédiger les réponses aux questions de ce sujet sur ***copies doubles****. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. S'agissant d'un devoir maison, n'hésitez pas à travailler avec votre cours à portée de main, mais assurez-vous d'y réfléchir par vous-mêmes !*

Date limite : Jeudi 20 mars.

Pendules couplés par un ressort

Partie 1 - Deux pendules couplés

On considère deux pendules M_1 et M_2 de même masse m et de longueur l, reliés ensemble par un ressort de raideur k et de longueur à vide L. Les deux points d'accroche au plafond, O_1 et O_2, sont aussi séparés par l_0. On se place dans la limite des petits angles, de sorte que le mouvement des points M_1 et M_2 peut être supposé **horizontal**. On définit un axe y horizontal, et un axe z orthogonal à la feuille venant vers vous. Enfin, on définit les deux quantités suivantes :



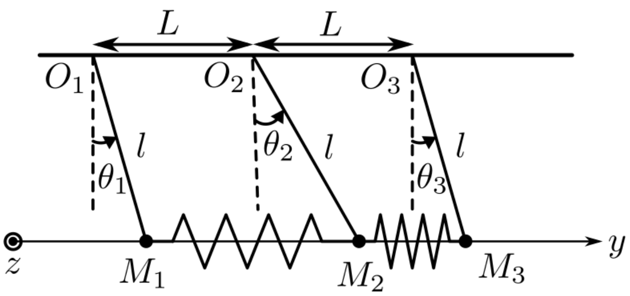
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}} \quad ; \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1. Sans calcul, quelle est la position de repos de M_1 et M_2 ?
2. A l'aide du théorème du moment cinétique appliqué au point M_1, montrer que, dans l'approximation des petits angles :
$$\ddot{\theta_1} + \omega^2\theta_1 = \Omega^2\theta_2$$
3. Même question pour le point M_2, pour obtenir une seconde équation différentielle :
$$\ddot{\theta_2} + \omega^2\theta_2 = \Omega^2\theta_1$$
4. On définit :
$$\psi_+ = \theta_1 + \theta_2 \quad ; \quad \psi_- = \theta_1 - \theta_2$$
Montrer que ces deux angles sont des oscillateurs harmoniques, dont on définira les pulsations propres $\omega_\pm$.
5. Déterminer ψ_+ et ψ_-, et en déduire $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$, en faisant intervenir des constantes d'intégration $K_\pm$ et $\varphi_\pm$.
6. Etude de quelques mouvements du système.
   (a) *Premier cas : lâcher avec le même angle.* On lâche les deux pendules avec le même angle initial θ_0 et sans vitesse initiale. Décrire le mouvement.
   (b) *Deuxième cas : lâcher avec des angles opposés.* On suppose que $\theta_2(0) = \theta_0$ et $\theta_1(0) = -\theta_0$. Décrire le mouvement.
   (c) *Troisième cas : battements.* On lâche le premier pendule avec un angle $\theta_1 = \theta_0$, sans vitesse initiale, et en laissant M_2 initialement à sa position d'équilibre (donc $\theta_2(0) = 0$). Montrer qu'il apparaît un phénomène de battements. Interpréter physiquement.
   (d) Dans ce dernier cas, justifier qu'il y a un échange d'énergie entre les pendules, mais que l'énergie mécanique totale du système reste conservée.

7. On change le système de la manière suivante : plutôt que de relier les pendules par un ressort au niveau de M_1 et M_2, on relie avec ce ressort deux points des fils des pendules, A_1 et A_2. On note $\lambda = O_1A_1 = O_2A_2$ la longueur de fil entre les accroches au plafond et les points d'attache du ressort. Comment sont modifiées les équations différentielles couplées dont θ_1 et θ_2 sont solutions ? Qu'est ce qui change dans la dynamique du système ?

Partie 2 - Trois pendules couplés (facultatif : pour ceux qui souhaitent aller en PC*...ou pour les curieux !)

Deux pendules, c'est rigolo, mais on peut faire mieux...non ?



(Pardon.)

Cette partie est plus calculatoire. Je conseille fortement de visionner la vidéo ci-contre. Elle aide à avoir une intuition sur les questions plus physiques de cette partie.

7. Faire *soigneusement* le bilan des forces s'exerçant sur M_1, M_2, et M_3.
8. On fait à nouveau l'approximation des petits angles. On pose :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad ; \quad \kappa^2 = \frac{k}{m}$$

Montrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont solution des trois équations différentielles couplées suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\theta_1} + \omega_0^2\theta_1 & = \kappa^2(\theta_2 - \theta_1) \\ \ddot{\theta_2} + \omega_0^2\theta_2 & = \kappa^2(\theta_1 - \theta_2) + \kappa^2(\theta_3 - \theta_2) \\ \ddot{\theta_3} + \omega_0^2\theta_3 & = \kappa^2(\theta_2 - \theta_3) \end{cases}$$

9. Découpler les équations est moins évident ici. On pose $\psi_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$.
   (a) Montrer que ψ_1 est un oscillateur harmonique, dont on donnera la pulsation propre ω_1 en fonction de ω_0 et κ.
   (b) En déduire le mouvement dans le cas où on lâche les trois pendules avec le même angle initial θ_0.
10. On pose $\psi_2 = \theta_1 - \theta_3$.
   (a) Montrer que c'est un oscillateur harmonique de pulsation ω_2 dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 et κ.
   (b) Comment faut-il définir les angles initiaux pour que chaque pendule ait, indépendamment des autres, un mouvement parfaitement sinusoïdal ? *On pourra s'inspirer du choix des conditions initiales dans la question 9b.*

11. Il reste un dernier "mode propre" $\psi_3 = \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3$.

    (a) Prouver, à nouveau, que c'est un oscillateur harmonique et donner sa pulsation ω_3.

    (b) *Bonus : il faut vraiment un sens physique aiguisé pour celle-là !* Expliquer physiquement pourquoi, si on lâche les pendules avec des angles initiaux $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_2(0) = -2\theta_0$ et $\theta_3(0) = \theta_0$, chaque pendule oscille de manière parfaitement sinusoïdale ?

12. Résoudre les équations pour ψ_1, ψ_2 et ψ_3 en introduisant des constantes d'intégration A_i et φ_i ($i = 1, 2, 3$).

13. Montrer que :

$$\begin{cases} \theta_1 &= \dfrac{1}{3}\psi_1 + \dfrac{1}{2}\psi_2 + \dfrac{1}{6}\psi_3 \\ \\ \theta_2 &= \dfrac{1}{3}\psi_1 - \dfrac{1}{3}\psi_3 \\ \\ \theta_3 &= \dfrac{1}{3}\psi_1 - \dfrac{1}{2}\psi_2 + \dfrac{1}{6}\psi_3 \end{cases}$$

14. En déduire les expressions de $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$ en fonction des différentes constantes A_i et φ_i, de t, de ω_0 et de κ.

15. On suppose qu'on lâche le pendule M_1 avec un angle θ_0, sans vitesse initiale, tous les autres étant initialement à l'équilibre. A l'aide des expressions des ψ_i, déterminer les constantes A_i et φ_i, et en déduire les expressions des $\theta_i(t)$.

16. Sans faire de calcul supplémentaire : justifier qu'il apparaît un phénomène de "battements" similaire au cas du double pendule : l'énergie cinétique de chaque (*les plus courageux (ou fous) pourront faire de la trigo pour mettre les θ sous forme de produit de fonctions trigo...*)

17. Au moment où θ_3 a l'amplitude la plus élevée, quel pendule devient immobile ?