Exercice 1 – Le chant du Chichén Itzá

1) Il y a des harmoniques (fonda + 3 harm. sur le sonogramme)
$\boxed{\tau_q \simeq 150\,ms \simeq 0{,}15\,s}$

2) $\nu_1 \simeq 600\,Hz$, $\nu_2 \simeq 1200\,Hz$, $\nu_3 \simeq 1800\,Hz$, $\nu_4 \simeq 2400\,Hz$

$\Rightarrow \boxed{\nu_m \simeq m\nu_1}$ cohérent pour des harmoniques.

3) ν diminue un peu au cours du temps : le son est plus grave à la fin du chant

4) C'est la célérité du son dans l'air.

5) $\psi(M,t) = s\left(t - \frac{SM}{c_s}\right) \Rightarrow \boxed{\psi(S_n,t) = s\left(t - \underbrace{\frac{d_n}{c}}_{=K}\right)}$

6) $\psi'(S_n,t) = k\,\psi(S_n,t) \Rightarrow \psi'(S,t) = k\,\psi\left(S_n, t - \frac{d_n}{c_s}\right)$

k : "coeff de réflexion"

$= k\,\psi\left(S, t - \frac{2d_n}{c_s}\right)$

($2d_n$ car l'onde a parcouru cette dist.)

$\boxed{\psi'(S,t) = k\,s\left(t - \underbrace{\frac{2d_n}{c_s}}_{=K'}\right)}$

7) Composante ω : $s(t) = s_0\cos(\omega t)$

$\Rightarrow \psi'(S,t) = k\,s_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)\right) = k\,s_0\cos(\varphi_n'(t))$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_n'(t) = \omega\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)}$

8) Les ondes issues des différents S_n interfèrent entre elles, car les d_n sont légèrement $\neq$ $\Rightarrow$ destruction / amplification de certaines fréquences du clap, ce qui modifie le son entendu !

9) $\Delta\varphi_n = \varphi_n'(t) - \varphi_{n+1}'(t) = \omega\left[\cancel{t} - \frac{2d_n}{c_s} - \left(\cancel{t} - \frac{2d_{n+1}}{c_s}\right)\right]$

$\boxed{\Delta\varphi_n = \frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n)}$

10) Condition d'interférences constructives : $\Delta\varphi_n = 2m\pi$; $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{2\omega_m}{c_s}(d_{n+1} - d_n) = 2m\pi \Leftrightarrow \boxed{\omega_m = \frac{m\pi c_s}{d_{n+1} - d_n}}$

Or, $\omega_m = 2\pi\nu_m \Rightarrow \boxed{\nu_m = \frac{m c_s}{d_{n+1} - d_n}, \; m \in \mathbb{N}}$

11) Pythagore : $d_n = \sqrt{(a+nb)^2 + (nb)^2}$

donc : $d_{n+1}^2 - d_n^2 = (a+(n+1)b)^2 + ((n+1)b)^2 - (a+nb)^2 - (nb)^2$

$= \cancel{a^2} + 2ab(n+1) + (n+1)^2b^2 + (n+1)^2b^2 - \cancel{a^2} - 2abn - (nb)^2 - (nb)^2$

$= 2(n+1)^2b^2 + \cancel{2abn} + 2ab - \cancel{2abn} - 2(nb)^2$

$= 2ab + 2b^2((n+1)^2 - n^2)$

$= 2ab + 2b^2(2n+1)$

$\boxed{d_{n+1}^2 - d_n^2 = 2ab + 2b^2 + 4nb^2}$

12) $d_{n+1}^2 - d_n^2 = (d_{n+1}+d_n)(d_{n+1}-d_n) \simeq 2d_n(d_{n+1}-d_n)$

donc $\nu_1 = \dfrac{c_s}{2(d_{n+1}-d_n)} = \dfrac{c_s \cdot \cancel{2} d_n}{\cancel{2}(d_{n+1}^2-d_n^2)} = \dfrac{c_s\, d_n}{d_{n+1}^2-d_n^2}$

Or, $d_{n+1}^2 - d_n^2 = 2ab + 2b^2 + 4nb^2 = 2ab\left[1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2nb}{a}\right]$

$$\Rightarrow \nu_1 = \frac{c_s}{2ab}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\frac{b}{a}+\frac{2nb}{a}}}_{\equiv g(n)}\cdot d_n = \boxed{\frac{c_s}{2ab}\,g(n)d_n}$$

13) $d_N = 50$ m (max du graphique). Les instants où les échos arrivent en M dépendent de la marche d'escalier considérée, car d_n augmente avec $n \Rightarrow$ "t_n" augmente aussi.

14) $t_1 = \dfrac{2d_1}{c_s} = \dfrac{2\times 20}{340} = 0{,}12$ s (20 m (min de d_n sur le graphe))

$t_N = \dfrac{2d_N}{c_s} = \dfrac{2\times 50}{340} = 0{,}29$ s

$\Rightarrow \boxed{\tau_e = t_N - t_1 = 0{,}17\text{ s}}$

proche de $\tau_q = 0{,}15$ s.

$\Rightarrow$ l'écho "total" entendu dure aussi longtemps que le cri de quetzal.

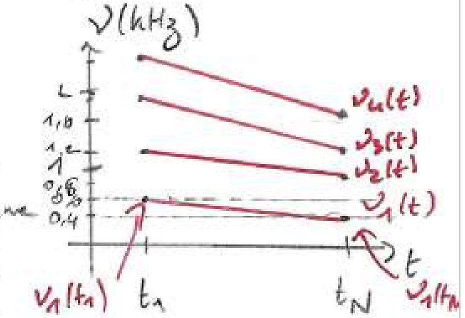
15) $\nu_1 = \alpha\, g(n)d_n$ et $g(n)d_n$ diminue avec n, donc $\nu_1(n)$ diminue avec n. Comme on entend plus tard les ondes réfléchies pour n grand, on entend des fréquences plus graves à la fin de l'écho (Rq : Comme le quetzal, dont le cri est plus grave à la fin)

16) $\nu_1(t_1) = \dfrac{c_s}{2ab}\underbrace{g(1)d_1}_{=19{,}5} = \boxed{630\text{ Hz}}$

$\nu_1(t_N) = \dfrac{c_s}{2ab}\underbrace{g(N)d_N}_{=14{,}3} = \boxed{462\text{ Hz}} < \nu_1(t_1)$

17) Pour obtenir ν_2, ν_3 et ν_4, on multiplie $\nu_1(t_1)$ et $\nu_1(t_N)$ par 2, 3, 4.

Ça ressemble pas mal au sonogramme du quetzal : le son est similaire ! (mais c'est approximatif)



Il est toujours possible que ce soit une coïncidence, mais il est probable que les Mayas aient volontairement construit leur pyramide ainsi. ν est peu sensible aux faibles variations de a ou b !