

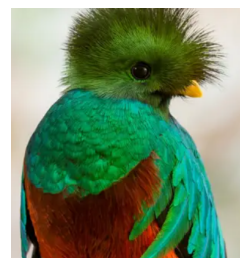
DM 5 - Ondes

Répondre aux questions de ce sujet sur **copies doubles**. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. S'agissant d'un devoir maison, n'hésitez pas à travailler avec votre cours à portée de main, mais assurez-vous d'y réfléchir par vous-mêmes !

Date limite : Mardi 14 janvier.

Le chant du Chichén Itzá

Chichén Itzá est un site archéologique maya au Mexique, dans le Yucatán. Sur ce site se trouve un grand temple pyramidal, le Cuuculcán (en photos ci-dessous), d'une hauteur $H = 24$ m. Un grand escalier de 91 marches, sur chacune de ses quatre faces, permet de se rendre au sommet.



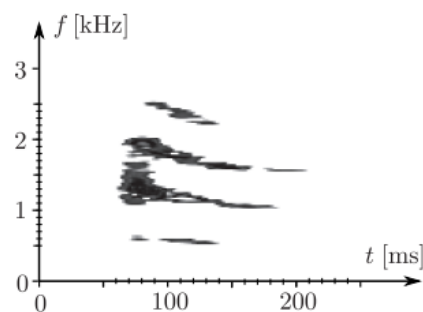
Un phénomène physique curieux peut être observé (ou plutôt entendu...) au pied de la pyramide. Lorsqu'on frappe dans ses mains, le son se réfléchit sur les escaliers et revient vers la source du son : on entend alors un son évoquant le cri du *quetzal*, oiseau tropical emblématique de la région. Les archéologues ont pour hypothèse que les escaliers de la pyramide ont été construits de sorte à imiter le son de cet oiseau, sacré pour les Mayas.



Flasher le QRCode pour visionner une vidéo montrant le phénomène.

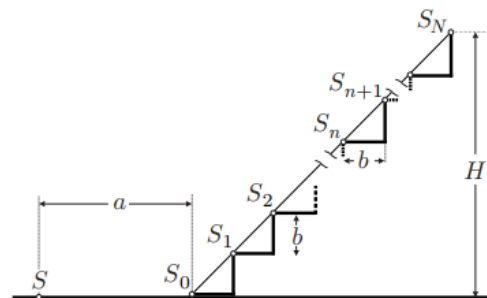
L'objectif de l'exercice est de modéliser simplement l'acoustique de l'escalier de la pyramide, et de vérifier si le son du quetzal correspond au son obtenu théoriquement en frappant des mains au pied de la pyramide.

Dans un premier temps, on s'intéresse au chant du quetzal "réel". Le graphique ci-contre est un *sonogramme* : il représente un enregistrement temporel du son émis par l'oiseau, en fonction de la fréquence. Si un point (t, f) du graphique est noir, cela signifie que la fréquence f en ordonnée a été entendue à l'instant t en abscisse.



1. Le son émis par le quetzal est-il purement sinusoïdal, ou comporte-t-il des harmoniques ? Estimer la durée τ_q pendant laquelle le quetzal a chanté.
2. Estimer graphiquement la fréquence fondamentale ν_1 du chant du quetzal, puis celles des autres fréquences visibles sur le sonogramme. Semblent-elles correspondre à des harmoniques de cette fréquence fondamentale ?
3. Les fréquences émises par l'oiseau sont-elles exactement constantes au cours du temps ? Si non, le son est-il plus aigu, plus grave à la fin du chant ?

On considère maintenant le son entendu au pied de la pyramide. A $t = 0$, un visiteur situé en S frappe dans ses mains, créant une onde sonore dont on note l'amplitude $\psi(S, t)$ qui se propage dans l'espace. On suppose que cette onde sonore contient toutes les fréquences audibles, avec la même amplitude, et que le "clap" est très bref. On note a la distance entre S et le pied des marches, et b la hauteur et la largeur d'une marche d'escalier, supposée carrée. Il y a $N = 91$ marches, dont les sommets sont repérés par les points $(S_1, S_2, \dots, S_N)$. S_0 est le pied de l'escalier. On supposera que les ondes se réfléchissent uniquement en S_k .



Enfin, on note $s(t)$ la fonction d'une seule variable qui représente le signal du clap.

On notera $\forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad d_n = SS_n$.

4. On note $c_s = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Que représente physiquement cette constante ?
5. Soit M un point de l'espace. On écrit $\psi(M, t) = s(X)$. Exprimer X en fonction de t , c_s et SM . Puis exprimer $\psi(S_n, t)$ pour tout n .
6. On suppose que l'onde se réfléchit en S_n , et que l'amplitude de l'onde réfléchie en S_n est $\psi'(S_n, t) = \kappa \psi(S_n, t)$, avec κ une constante sans dimension. Montrer que $\psi'(S, t) = \kappa s(X')$ en S , et donner l'expression de X' en fonction de t , c_s et d_n .
7. On s'intéresse à la composante de pulsation ω du son émis. Calculer $\varphi'_n(t)$, la phase de l'onde réfléchie en S , en fonction de ω , d_n , t et c_s .
8. Expliquer pourquoi le son entendu par le visiteur, en S , n'est pas exactement identique au son du "clap" initial.

On suppose que le clap est court : cela signifie que les ondes sonores réfléchies ne peuvent interférer entre elles que si elles viennent de deux marches consécutives. On s'intéresse donc au déphasage $\Delta\varphi = \varphi'_n(t) - \varphi'_{n+1}(t)$, entre les ondes réfléchies en S_n et S_{n+1} .

9. Montrer que $\Delta\varphi_n = \frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n)$.
10. En déduire l'ensemble $\{\nu_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ des fréquences entendues après interférences, lors du retour du son issu de S_n et S_{n+1} , en fonction notamment de d_n et d_{n+1} .
11. Exprimer d_n en fonction de a , b et n . Puis montrer que :

$$d_{n+1}^2 - d_n^2 = 2ab + 2b^2 + 4nb^2$$

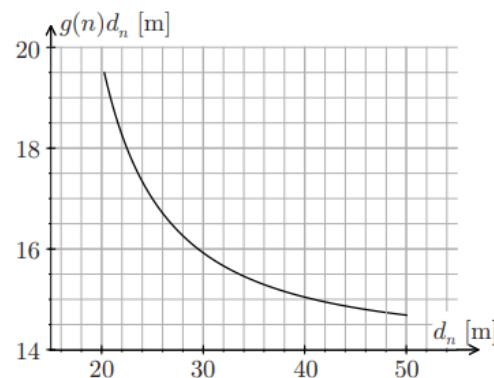
12. On suppose que $a \gg b$, ce qui permet d'écrire $d_n + d_{n+1} \simeq 2d_n$. Exprimer $(d_{n+1}^2 - d_n^2)$ en fonction de $(d_{n+1} - d_n)$ et d_n , puis prouver qu'on peut écrire la fréquence fondamentale ν_1 comme :

$$\nu_1 \simeq \frac{c_s}{2ab} g(n) d_n$$

en précisant la fonction $g(n)$.

On représente ci-contre la courbe $g(n) \cdot d_n$ en fonction de d_n , pour éviter les calculs pénibles : utiliser des lectures graphiques si besoin ! Ce graphique contient les distances pour les 91 marches de l'escalier.

De plus, on donne pour les applications numériques : $a = 20,0 \text{ m}$, et $b = 26,3 \text{ cm}$.



13. Déterminer, à l'aide du graphique, la distance d_N entre S et le sommet de l'escalier. Justifier que les échos en S_n n'arrivent pas tous en même temps en S suivant la valeur de l'entier n .
14. On fixe $t = 0$ au moment de début du clap. Calculer t_1 , l'instant d'arrivée du début de l'écho en S , et t_N , l'instant de fin de l'écho. En déduire la durée totale τ_e de l'écho, et comparer avec la durée du chant du quetzal τ_q obtenu au début de l'exercice. Commenter.
15. Justifier physiquement que la fréquence fondamentale ν_1 pour lesquelles les interférences pour n faible est plus élevée que pour n élevé.
16. Calculer, en vous aidant du graphique, les valeurs numériques de $\nu_1(t_1)$ et $\nu_1(t_N)$. On vérifiera notamment que ν_1 diminue au cours du temps.
17. Tracer l'allure du *sonogramme* de l'écho, c'est-à-dire la courbe $\nu_1 = f(t)$. Sur le même graphique, représenter les courbes des trois harmoniques $\nu_2(t)$, $\nu_3(t)$ et $\nu_4(t)$. Comparer ce sonogramme à celui obtenu par enregistrement du quetzal au début de l'exercice: semblent-ils concorder ? Conclure.