DM 3 - Corrigé

1 Modélisation du comportement thermique d'une maison

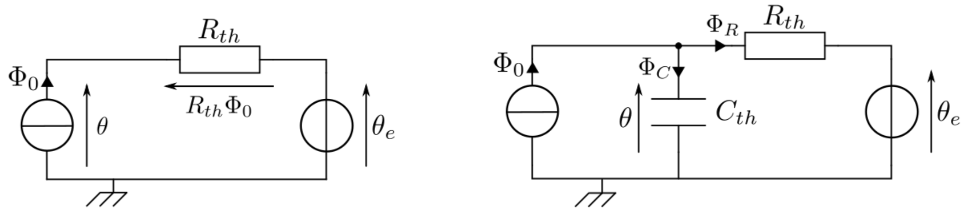
1. En régime permanent en électrocinétique, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent. Il en va de même pour C_{th} (mathématiquement, cela se traduit par $\Phi = C_{\text{th}}\dfrac{d\theta}{dt} = 0$ en régime permanent).
2. Voir le schéma équivalent en régime permanent ci-dessous, à gauche. La loi des mailles donne (attention a l'orientation de la "tension" aux bornes de R_{th}, qui doit être en convention récepteur)

$$\theta - R_{\text{th}}\Phi_0 - \theta_e = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi_0 = \frac{\theta - \theta_e}{R_{\text{th}}}$$

A l'équilibre, on souhaite que $\theta = \theta_c$. Ainsi,

$$\boxed{\Phi_0 = \frac{\theta_c - \theta_e}{R_{\text{th}}} = 6{,}0\,\text{kW}}$$

On peut interpréter le fait que $\phi_0 \neq 0$: la maison se refroidit en permanence, et donc la chaudière doit apporter en permanence de l'énergie pour éviter qu'elle ne se refroidisse.



3. On peut écrire deux lois des circuits (voir le schéma ci-dessus, à droite pour les notations) :

   - *Loi des nœuds à la maison :* $\Phi_0 = \Phi_C + \Phi_R = C_{\text{th}}\dfrac{d\theta}{dt} + \Phi_R$.
   - *Loi des mailles à droite :* $\theta = R_{\text{th}}\Phi_R + \theta_e$

   On peut donc remplacer $\Phi_R = \dfrac{\theta - \theta_e}{R_{\text{th}}}$ dans la loi des nœuds :

$$\Phi_0 = C_{\text{th}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta - \theta_e}{R_{\text{th}}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}\theta = \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}\left(\theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0\right)$$

   On pose alors $\boxed{\tau = R_{\text{th}}C_{\text{th}}}$, de sorte que l'équation s'écrive

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta = \frac{1}{\tau}\left(\theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0\right)}$$

   $[\tau] = T$: c'est un temps caractéristique.*On remarquera la ressemblance frappante avec celui du circuit RC série du cours !*

4. La solution de l'équation homogène s'écrit

$$\theta_{\mathcal{H}}(t) = \lambda e^{-t/\tau}$$

   avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut chercher une solution particulière θ_p constante, et donc de dérivée nulle. On a alors

$$\frac{1}{\tau}\theta_p = \frac{1}{\tau}(\theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0) \quad \Longrightarrow \quad \theta_p = \theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0$$

Ainsi, la solution générale de l'équation complète s'écrit :

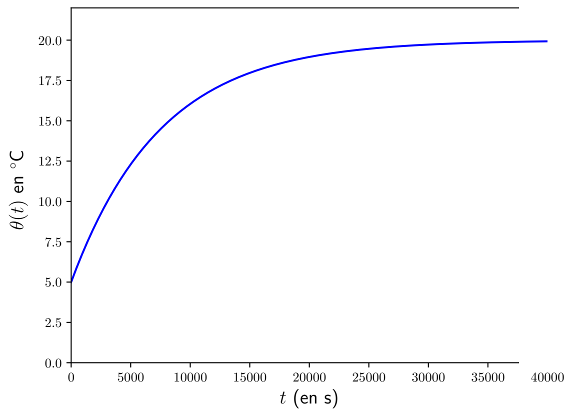
$$\theta(t) = \theta_{\mathcal{H}}(t) + \theta_p = \lambda e^{-t/\tau} + \theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0$$

On peut alors chercher la valeur de λ à l'aide de la condition initiale $\theta(0) = \theta_e$:

$$\theta_e = \lambda + \theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = -R_{\text{th}}\Phi_0$$

Ainsi,

$$\boxed{\theta(t) = \theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



6. On atteint la température de consigne en environ $\boxed{t_1 \simeq 5\tau = 3{,}8 \cdot 10^4\ \text{s}}$ (c'est-à-dire environ 10h34min). C'est un temps plutôt long : cette installation n'est pas très efficace...
7. $\Phi(0) = \Phi_0(1 + 9e^0) = 10\Phi_0$: on chauffe donc dix fois plus vite qu'avant au début du processus ! $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = \Phi_0$: la chaudière fournit de moins en moins d'énergie, jusqu'à fournir la même puissance en régime permanent que dans la situation précédente. L'idée est de chauffer plus fort au début pour diminuer le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre.
8. On établit l'équation différentielle de la même manière qu'à la question 3, en remplaçant Φ_0 par $\Phi(t)$. Il n'est donc pas nécessaire de refaire le calcul :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta = \frac{1}{\tau}\left(\theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0\left[1 + 9e^{-t/\tau_c}\right]\right)}$$

9. La solution de l'équation homogène est toujours de la forme $Ae^{t/\tau}$ (le deuxième "morceau" de la solution proposée). C'est la recherche de la solution particulière qui est plus délicate : elle correspond à tout le reste de $\theta(t)$. Pour vérifier que la forme proposée de $\theta(t)$ est bien solution, on peut la remplacer dans l'équation. Pour cela, on calcule sa dérivée :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau_c}\frac{9(\theta_c - \theta_e)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}e^{-t/\tau_c} - \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} = -\frac{9(\theta_c - \theta_e)}{\tau_c - \tau}e^{-t/\tau_c} - \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta &= -\frac{9(\theta_c - \theta_e)}{\tau_c - \tau}e^{-t/\tau_c} - \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{\theta_c}{\tau} + \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{9(\theta_c - \theta_e)}{\tau\left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)}e^{-t/\tau_c} \\ &= \frac{9(\theta_c - \theta_e)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}\left[-\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau}\right]e^{-t/\tau_c} + \frac{\theta_c}{\tau}\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)$$

Donc :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta = \frac{9(\theta_c - \theta_e)}{\tau}e^{-t/\tau_c} + \frac{\theta_c}{\tau}$$

or, en régime permanent, on sait que $R_{\text{th}}\Phi_0 = \theta_c - \theta_e$, donc

$$\theta_c = \theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0$$

et on peut remplacer dans l'équation :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta = \frac{1}{\tau}\left[\theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0 + 9R_{\text{th}}\Phi_0 e^{-t/\tau_c}\right] = \frac{1}{\tau}\left[\theta_e + R_{\text{th}}\Phi_0\left(1 + 9e^{-t/\tau_c}\right)\right]$$

Donc $\boxed{\theta \text{ est bien solution}}$.

10. On détermine A avec la condition initiale : $\theta(0) = \theta_e$. On obtient

$$A = \theta_e - \theta_c - \frac{9(\theta_c - \theta_e)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}} = \frac{(\theta_c - \theta_e)\left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}} - \frac{9(\theta_c - \theta_e)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}} = \frac{(\theta_c - \theta_e)\left(-1 + \frac{\tau}{\tau_c} - 9\right)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}$$

et donc

$$\boxed{A = \frac{(\theta_c - \theta_e)\left(\frac{\tau}{\tau_c} - 10\right)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}}$$

On peut donc avoir $A = 0$, si le numérateur s'annule, c'est-à-dire si

$$\frac{\tau}{\tau_c} - 10 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau_c = \frac{\tau}{10}}$$

11. Dans ces conditions, θ devient

$$\theta(t) = \theta_c + \frac{9(\theta_c - \theta_e)}{1 - 10}e^{-t/\tau_c} = \theta_c + (\theta_c - \theta_e)e^{-t/\tau_c}$$

Le régime permanent est alors atteint pour

$$\boxed{t_2 \simeq 5\tau_c \simeq \frac{t_1}{10} \simeq 3{,}8 \cdot 10^3\ \text{s}}$$

soit environ 1h03min : c'est un temps beaucoup plus court que t_1, et d'un ordre de grandeur bien plus raisonnable pour chauffer une maison !

2 Circuits LC couplés par induction mutuelle

1. Je ne refais pas les schémas, mais on met toutes les tensions en convention *récepteur* (à vous de les refaire !). La loi des mailles pour le premier circuit s'écrit

$$u_{C,1} + u_{L,1} = 0$$

On a d'une part $u_{C,1} = \dfrac{q_1}{C}$, et d'autre part avec la loi "modifiée" de la bobine, $u_{L,1} = L\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt}$. En remplaçant dans la loi des mailles,

$$L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + \frac{q_1}{C} = 0$$

En divisant par L, et en posant $K = \frac{M}{L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on a

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + K\frac{di_2}{dt} + \omega_0^2 q_1 = 0}$$

2. Un raisonnement très similaire sur le deuxième circuit, en échangeant les rôles de i_1 et i_2 et en remplaçant q_1 par q_2 donne

$$\boxed{\frac{di_2}{dt} + K\frac{di_1}{dt} + \omega_0^2 q_2 = 0}$$

3. Les deux circuits étant de simples mailles, on peut y écrire que $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ et $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$. En remplaçant dans les équations :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d^2q_1}{dt^2} + K\frac{d^2q_2}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 &= 0 \\ \frac{d^2q_2}{dt^2} + K\frac{d^2q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_2 &= 0 \end{cases}}$$

4. **Equation sur S.** Comme $S = q_1 + q_2$, on peut additionner les deux équations membre à membre et exploiter la linéarité de la dérivée :

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + K\frac{d^2q_2}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 + \frac{d^2q_2}{dt^2} + K\frac{d^2q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2(q_1+q_2)}{dt^2} + K\frac{d^2(q_2+q_1)}{dt^2} + \omega_0^2(q_1+q_2) = 0$$

D'où, en introduisant S dans l'équation et en divisant par $1+K$:

$$\boxed{\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{1+K}S = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2S}{dt^2} + \omega_S^2 S = 0}$$

avec $\boxed{\omega_S = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}}$. C'est bien un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_S.

Equation sur A. On raisonne de la même manière, mais on fait cette fois-ci la différence entre la première équation et la deuxième. On obtient alors :

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + K\frac{d^2q_2}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 - \frac{d^2q_2}{dt^2} - K\frac{d^2q_1}{dt^2} - \omega_0^2 q_2 = 0 \Longrightarrow \quad \frac{d^2(q_1-q_2)}{dt^2} - K\frac{d^2(q_2-q_1)}{dt^2} + \omega_0^2(q_1-q_2) = 0$$

Ainsi, on reconnaît

$$\boxed{\frac{d^2A}{dt^2} + \omega_A^2 A = 0}$$

avec $\boxed{\omega_A = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}}$. C'est bien un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_A.

5. On obtient assez immédiatement, avec des constantes d'intégration (a, b, c, d) :

$$S(t) = a\cos(\omega_S t) + b\sin(\omega_S t) \quad ; \quad A(t) = c\cos(\omega_A t) + d\sin(\omega_A t)$$

On détermine ensuite les constantes à l'aide des conditions initiales :

- Initialement, seul le premier condensateur est chargé, donc $q_1(0) = q_0$ et $q_2(0) = 0$. Il en découle que $S(0) = q_1(0) + q_2(0) = 0$, et que $A(0) = q_1(0) - q_2(0) = 0$.

- L'intensité est continue dans la bobine et initialement, les circuits étant ouverts, $i_1(0) = i_2(0) = 0$. On en déduit que $\frac{dS}{dt}(0) = i_1(0) + i_2(0) = 0$ et que $\frac{dA}{dt} = 0$ également.

De plus, on peut calculer les dérivées de S et A pour tout t :

$$\frac{dS}{dt} = -a\omega_S \sin(\omega_S t) + b\omega_S \cos(\omega_S t) \quad ; \quad \frac{dA}{dt} = -c\omega_A \sin(\omega_A t) + d\omega_A \cos(\omega_A t)$$

En appliquant les conditions initiales, on obtient quatre équations sur a, b, c, d :

$$\begin{cases} a\cos(0) + b\sin(0) & = q_0 \\ c\cos(0) + d\sin(0) & = q_0 \\ -a\omega_S \sin(0) + b\omega_S \cos(0) & = 0 \\ -c\omega_A \sin(0) + d\omega_A \cos(0) & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a & = q_0 \\ b & = q_0 \\ c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{cases} S(t) & = q_0 \cos(\omega_S t) \\ A(t) & = q_0 \cos(\omega_A t) \end{cases}}$$

6. En revenant aux définitions de S et A, on remarque que :

$$\begin{cases} S + A & = 2q_1 \\ S - A & = 2q_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 & = \dfrac{S+A}{2} \\ \\ q_2 & = \dfrac{S-A}{2} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} q_1(t) & = \dfrac{q_0}{2}(\cos(\omega_S t) + \cos(\omega_A t)) \\ \\ q_2(t) & = \dfrac{q_0}{2}(\cos(\omega_S t) - \cos(\omega_A t)) \end{cases}$$

L'énoncé suggère plutôt un produit de fonctions trigonométriques : on peut utiliser les transformations de somme de cosinus en produit

$$\begin{cases} \cos a + \cos b & = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \\ \cos a - \cos b & = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} q_1(t) & = q_0 \cos\left(\dfrac{\omega_S + \omega_A}{2} t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_S - \omega_A}{2} t\right) \\ \\ q_2(t) & = -q_0 \sin\left(\dfrac{\omega_S + \omega_A}{2} t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_S - \omega_A}{2} t\right) \end{cases}$$

En utilisant l'imparité de sinus, on peut rentrer le signe $-$ de q_2 dans le deuxième sinus, en changeant $\omega_S - \omega_A$ en $\omega_A - \omega_S$. Puis par parité de cosinus, on peut aussi passer à $\omega_A - \omega_S$ dans le deuxième cosinus de q_1 sans avoir a changer de signe. Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} q_1(t) & = q_0 \cos(\alpha t)\cos(\beta t) \\ q_2(t) & = q_0 \sin(\alpha t)\sin(\beta t) \end{cases}}$$

avec $\boxed{\alpha = \dfrac{\omega_A + \omega_S}{2}}$ et $\boxed{\beta = \dfrac{\omega_A - \omega_S}{2}}$.

7. On se ramène à la forme proposée par l'énoncé pour les expressions en fonction de K :

$$\frac{1}{\sqrt{1+K}} = (1+K)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{K}{2} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1-K}} = (1-K)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{K}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \omega_S & \simeq \omega_0 \left(1 - \dfrac{K}{2}\right) \\ \omega_A & \simeq \omega_0 \left(1 + \dfrac{K}{2}\right) \end{cases}$$

Et ainsi,

$$\boxed{\frac{\omega_A + \omega_S}{2} \simeq \frac{\omega_0}{2}\left(1 + \frac{K}{2} + 1 - \frac{K}{2}\right) \simeq \omega_0}$$

De la même manière,

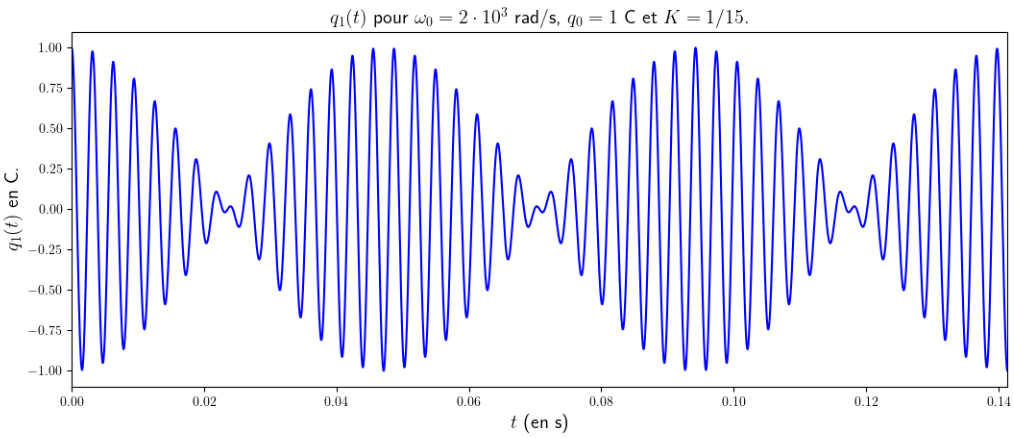
$$\boxed{\frac{\omega_A - \omega_S}{2} \simeq \frac{\omega_0}{2}\left(1 + \frac{K}{2} - 1 + \frac{K}{2}\right) \simeq \frac{K\omega_0}{2} = \Omega}$$

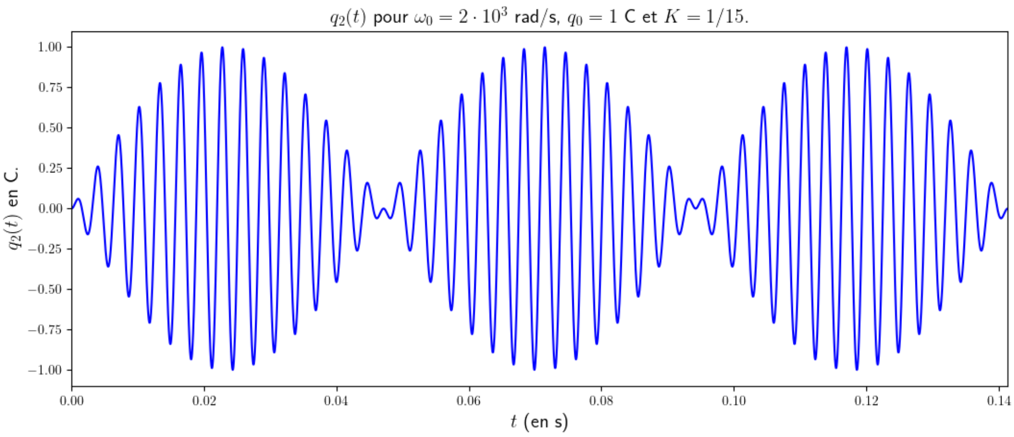
8. On a immédiatement

$$\boxed{\begin{cases} q_1(t) & = q_0 \cos(\omega_0 t)\cos(\Omega t) \\ q_2(t) & = q_0 \sin(\omega_0 t)\sin(\Omega t) \end{cases}}$$

9. Voir les graphiques ci-dessous. On voit bien le phénomène de "battements" : le cosinus/sinus plus "lent" (de pulsation Ω) joue le rôle d'enveloppe pour le cosinus/sinus plus "rapide" (de pulsation ω_0).

La période des battements est donc liée à Ω : $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{4\pi}{K\omega_0}}$.





10. On souhaite $T = 0{,}10\,\mathrm{s}$ (deux chiffres significatifs arbitraires ici, le sujet ne le précise pas). On a également $K = 1/15$. On en déduit $\omega_0 = \dfrac{4\pi}{KT} = 1{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. A partir de cette valeur et de la définition de ω_0 en fonction de L et C, on peut choisir arbitrairement un des deux (par exemple $\boxed{L = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{H}}$) et en déduire l'autre :

$$\boxed{C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{F}}$$