DM 3 - Electrocinétique

Résoudre les deux exercices de ce sujet sur ***copies doubles****. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. S'agissant d'un devoir maison, n'hésitez pas à travailler avec votre cours à portée de main, mais assurez-vous d'y réfléchir par vous-mêmes !*

Date limite : Mardi 12 Novembre.

1 Modélisation du comportement thermique d'une maison

Dans un circuit électrique, la notion de résistance R permet de modéliser la proportionnalité qui existe entre la différence de potentiel $u = V_2 - V_1$ entre deux points d'un circuit, et l'intensité du courant i qui circule entre ces deux points. Le courant "s'écoule" vers les plus faibles potentiels :

$$u = V_2 - V_1 = Ri$$

Il y a une analogie avec le comportement thermique d'un matériau : la notion de résistance thermique R_{th} permet de modéliser la proportionnalité qu'il existe entre la différence de température $\theta = T_2 - T_1$ entre deux points du matériau, et le flux thermique Φ (quantité d'énergie thermique échangée par seconde) qui circule entre ces deux points. Le flux thermique "s'écoule" vers les zones plus froides :

$$\theta = T_2 - T_1 = R_{th}\Phi$$

L'analogie ne s'arrête pas là : on peut également trouver un équivalent thermique à la notion de capacité électrique. La capacité permet de décrire la modification de la charge d'un condensateur lorsqu'il reçoit un courant, et donc le lien entre du/dt et i. Par analogie, la capacité thermique C_{th} décrit la modification de la température d'un système lorsqu'il reçoit un flux thermique, et relie donc $d\theta/dt$ et Φ.

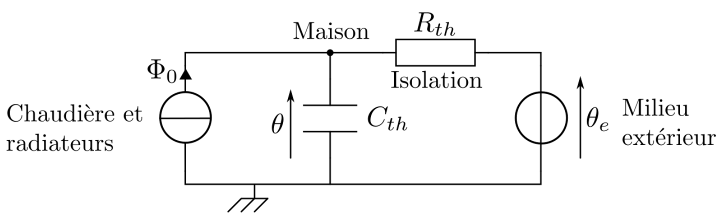
L'objectif de l'exercice est de modéliser le comportement thermique d'une maison à l'aide de l'analogie thermique-électrique : on modélisera les résistances thermiques (zones de transfert d'énergie thermique) par des résistors, et les capacités thermiques (zones de stockage de l'énergie thermique) par des condensateurs.

Aucune notion de thermodynamique n'est nécessaire pour traiter cet exercice ! Tout est strictement équivalent à l'étude d'un circuit électrique, a condition de faire les substitutions du tableau ci-dessous, qui répertorie également les unités dans lesquelles on exprime les grandeurs thermiques.

Grandeur thermique	Unité	Grandeur électrique associée
Température T	Kelvin K ou degré Celsius °C	Potentiel électrique V
Différence de température θ	Kelvin K ou degré Celsius °C	Tension électrique u
Flux thermique Φ	Watt W	Intensité du courant i
Résistance thermique R_{th}	Kelvin par Watt $\mathrm{K \cdot W^{-1}}$	Résistance électrique R
Capacité thermique C_{th}	Joule par Kelvin $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$	Capacité C

On rappelle la correspondance degré Celsius-Kelvin : $T(°\mathrm{C}) = T(\mathrm{K}) - 273,15$.

On propose le modèle électrique équivalent ci-contre pour étudier le comportement thermique de la maison. Le générateur de courant représente une source de chaleur : la chaudière. Le générateur de tension représente un thermostat (zone de température indépendante de la température intérieure de la maison) : l'extérieur.



L'isolation des murs est représentée par une résistance thermique R_{th}, et la capacité de la maison à stocker l'énergie thermique par un condensateur de capacité C_{th}.

La masse du circuit correspond à un point de référence des températures : on le choisit arbitrairement comme $T = 0\,°\mathrm{C}$ (comme dans un circuit électrique, où la masse correspond à $V = 0$.

1. Lorsqu'on atteint le régime permanent (c'est-à-dire que $\theta = \theta_c$, une température constante de "consigne"), expliquer pourquoi on peut faire abstraction de C_{th}.
2. En déduire, en fonction de θ_e, θ_c et R_{th}, la puissance thermique Φ_0 nécessaire pour que θ reste égale à θ_c en régime permanent. Faire l'application numérique avec $\theta_e = 5{,}0\,°\mathrm{C}$, $\theta_c = 20\,°\mathrm{C}$ et $R_{th} = 2{,}5\,\mathrm{mW}\cdot\mathrm{W}^{-1}$.

On suppose maintenant que la température initiale de l'habitat est égale à la température extérieure : $\theta(t=0) = \theta_e$. On met en marche la chaudière à $t = 0$, qui fournit un flux thermique constant Φ_0.

3. Montrer que :
$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta = \frac{1}{\tau}(\theta_e + R_{th}\Phi_0)$$
et donner l'expression de τ en fonction de R_{th} et C_{th}, sa dimension et sa signification physique.
4. Résoudre cette équation différentielle, en tenant compte des conditions initiales. Puis tracer qualitativement l'allure de $\theta(t)$.
5. Calculer le temps t_1 nécessaire pour atteindre la valeur de consigne $\theta_c = 20\,°\mathrm{C}$ en régime permanent. Faire l'application numérique, avec $C_{th} = 3{,}0\,\mathrm{MJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. Que pensez-vous de cette valeur ?

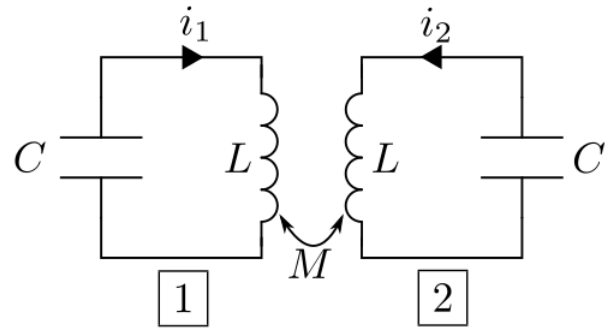
On souhaite accélérer le chauffage de la maison, sans dépasser la consigne θ_c. Pour cela, on programme la chaudière pour qu'elle fournisse le flux thermique :

$$\Phi(t) = \Phi_0\left(1 + 9e^{-t/\tau_c}\right)$$

avec τ_c un paramètre réglable par l'utilisateur.

8. Calculer $\Phi(0)$ et $\lim_{t\to+\infty}\Phi(t)$. Commenter : la chaudière fournit-elle plus ou moins de puissance au fur et à mesure que le temps passe ?
9. Ecrire la nouvelle équation dont $\theta(t)$ est solution.
10. On propose comme solution de cette équation :
$$\theta(t) = \theta_c + \frac{9(\theta_c - \theta_e)}{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}e^{-t/\tau_c} + Ae^{-t/\tau}$$
Vérifier que $\theta(t)$ est bien solution de l'équation, et identifier quelle partie de $\theta(t)$ est la solution de l'équation homogène, et laquelle est la solution particulière de l'équation avec second membre.
11. Déterminer A avec les conditions initiales, et montrer que l'on peut choisir une valeur particulière de τ_c pour que $A = 0$.
12. Dans ces conditions, simplifier l'expression de $\theta(t)$, puis calculer le temps t_2 après lequel le régime permanent $\theta = \theta_c = 20\,°\mathrm{C}$ est atteint. Comparer avec t_1.

2 Circuits LC couplés par induction mutuelle



On verra, à la fin de l'année, que deux bobines voisines l'une de l'autre peuvent interagir par le biais de leurs champs magnétiques respectifs : les variation du champ de l'une induisant un courant électrique dans l'autre : on parle d'*induction mutuelle*. Le circuit représenté ci-contre représente deux circuits LC *couplés par mutuelle*, c'est-à-dire que les intensités électriques i_1 et i_2 ne sont pas indépendantes.

On considère que, initialement, le condensateur 1 est chargé avec une charge q_0 sur l'armature du bas, et donc $-q_0$ sur l'armature du haut. On ferme le circuit à $t = 0$, puis on étudie le comportement des charges des deux condensateurs, $q_1(t)$ et $q_2(t)$. On admet que, lors du couplage par mutuelle de deux bobines L_1 et L_2, la relation fondamentale est modifiée : elle s'écrit

$$u_{L1}(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad ; \quad u_{L2}(t) = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

avec M l'*inductance mutuelle* entre les deux bobines, et L_k les inductances habituelles (ou *inductance propre*). Enfin, on pose

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad K = \frac{M}{L}$$

1. En considérant d'abord le circuit 1, déterminer l'équation différentielle satisfaite par q_1 : elle met en jeu les deux intensités, i_1 et i_2.
2. Faire la même chose avec le circuit 2, pour déterminer une équation différentielle satisfaite par q_2, mettant en jeu i_1 et i_2.
3. Ecrire les relations entre i_k et q_k, pour $k \in \{1\,;2\}$, puis simplifier les équations des questions 1 et 2 pour ne faire plus apparaître que les charges et des constantes.
4. On introduit deux fonctions intermédiaires :
$$S = q_1 + q_2 \quad ; \quad A = q_1 - q_2$$
Montrer que S et A sont des oscillateurs harmoniques, dont on exprimera les pulsations propres ω_S et ω_A.
5. Résoudre les équations différentielles pour déterminer $S(t)$ et $A(t)$.
6. En déduire que :
$$q_1(t) = q_0\cos(\alpha t)\cos(\beta t) \quad ; \quad q_2(t) = q_0\sin(\alpha t)\sin(\beta t)$$
en précisant l'expression de α et β en fonction de ω_A et ω_S. *Indication : Vous connaissez votre formulaire de trigonométrie, n'est-ce pas ?*
7. On suppose que $K << 1$. Montrer que :
$$\frac{\omega_A + \omega_S}{2} \simeq \omega_0 \quad ; \quad \frac{\omega_A - \omega_S}{2} \simeq \frac{K\omega_0}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega$$
On donne, pour $\varepsilon << 1$ *:* $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$.
8. Simplifier les expressions de q_1 et q_2 en faisant intervenir ω_0 et Ω.
9. Tracer qualitativement les fonctions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ (vous pouvez vous aider d'un traceur de fonctions en ligne, de votre calculatrice, de Python...). Exprimer la période T des "battements" de la fonction (oscillations les plus lentes) en fonction de K et ω_0.
10. On suppose que $K = 1/15$. Proposer des valeurs de L et de C pour que le phénomène de battements/modulation se produise avec une période d'un dixième de seconde.