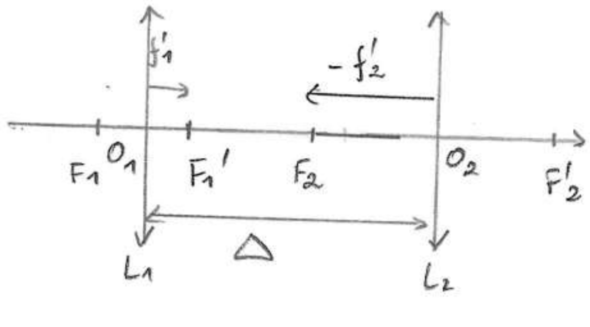
DM2 – Optique géométrique
Corrigé

Exercice 1 – Encombrement d'un microscope optique

1) Image de $\overline{AB}$ à l'∞ $\Rightarrow$ conditions de vision idéales pour l'oeil, qui n'a pas besoin d'accomoder.

2) On utilise la relation de Chasles:



$\Delta = \overline{O_1O_2}$

$= \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2O_2}$

$$\Delta = f_1' + \overline{F_1'F_2} + f_2'$$

Or, on souhaite que le microscope forme une image à l'infini. Il faut donc que l'image $\overline{A_1B_1}$ de $\overline{AB}$ par L_1 se trouve dans le plan focal objet de L_2. $\boxed{A_1 = F_2}$. Donc $\overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'A_1}$

Et finalement: $\boxed{\Delta = f_1' + f_2' + \overline{F_1'A_1}}$

3) Relation de conjugaison avec origine au foyer (car on veut $\overline{F_1'A_1}$):

$\overline{F_1'A_1} = \dfrac{-f_1'^2}{\overline{F_1A}}$ Donc $\boxed{\Delta = f_1' + f_2' - \dfrac{f_1'^2}{\overline{F_1A}}}$

AN: $f_1' = 5{,}00\,mm$, $f_2' = 25{,}0\,mm$, $\overline{F_1A} = -\overline{AF_1} = -0{,}10\,mm$ 2CS

$\boxed{\Delta = 2{,}8 \cdot 10^2\,mm = 280\,mm}$

Exercice 2 – Arcs-en-ciel

Partie 1 – Premier arc

1). Loi de la réflexion: $i = -i_r$ avec i_r l'angle réfléchi

· Loi de la réfraction: $n_1 \sin i = n_2 \sin r$

2) Réflexion totale: si $n_2 > n_1$, $\sin r > \sin i$, donc au delà d'un certain angle d'incidence i_{lim}, le rayon réfracté n'existe plus (car "$r > \pi/2$")

Calcul de i_{lim}: $\sin r = \pi/2 \Rightarrow n_1 \sin i_{lim} = n_2$

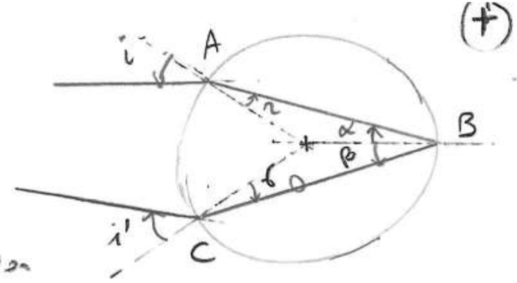
Donc $\boxed{i_{lim} = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)}$ AN: $n_1 = 1{,}33$, $n_2 = 1{,}00$ $\Rightarrow \boxed{i_{lim} = 48{,}8°}$

3) $\sin i = n \sin r$ car $n_{air} = 1$.

4) En B, on rencontre un dioptre eau-air, donc on est dans le cas de la question 2: il faut que $r > 48{,}8°$ pour qu'il y ait réflexion totale. Mais dans ce cas, en vertu de la loi de la réflexion, le rayon restera piégé dans la goutte (car tous les angles α, β, γ... sont identiques, cf après).

On remarque que OAB est isocèle: $\alpha = \pm r$. Pour trouver le signe de α, on définit un sens positif pour les angles : le sens trigo.

Donc $\boxed{\alpha = -r}$



Réflexion en B : la loi de la réflexion donne $\boxed{\beta = -\alpha = r}$

A nouveau, OBC étant isocèle en O, on a $\gamma = \pm\beta$. En fait $\boxed{\gamma = -r}$ car il est orienté dans le sens anti-trigo.

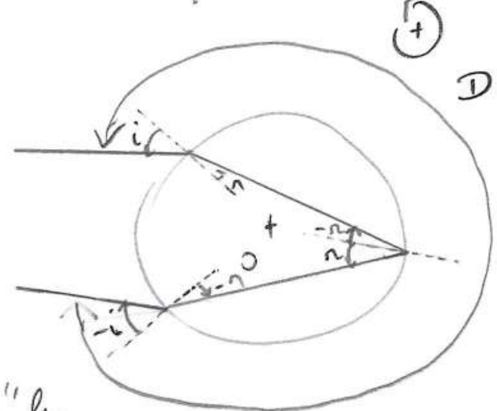
Enfin, on applique la loi de la réfraction en C :

$$\sin i' = n \sin \gamma = n \sin(-r) = -n \sin r.$$

Or, on a vu en A que $\sin i = n \sin r$, donc $\sin i' = \sin i$.

Comme $(i, i') \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$, on en conclut que $\boxed{i' = -i}$

5) D est défini sur le schéma ci-contre : c'est l'angle entre le rayon sortant et le rayon entrant. Pour le déterminer, on suit le chemin du rayon sortant vers le rayon entrant, et on "compte" les déviations successives subies.



- En C : Dévié de i puis de $-r$: $i - r$
- En B : Réfléchi, dévié de $\underset{\text{"demi-tour"}}{\pi} - \underset{\text{angle de réflexion}}{2r}$
- En A : Dévié de $-r$, puis de i : $i - r$.

Puis on somme toutes ces déviations.

$$D = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r)$$

$$\boxed{D = \pi + 2i - 4r}$$

6) $\sin i = n \sin r(i) \Rightarrow \boxed{r(i) = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)}$

Dérivée des composées : $\frac{dr}{di} = \frac{d}{di}\left(\frac{\sin i}{n}\right) \cdot \frac{d \arcsin x}{dx}\left(x = \frac{\sin i}{n}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}}}$$

7) On cherche un extremum de D : cela revient à chercher l'annulation de sa dérivée, donc à résoudre $\frac{dD}{di}(i = i_m) = 0$ pour i_m.

8) $D = \underset{\text{cste}}{\pi} + 2i - 4r$ donc $\frac{dD}{di} = 2\cancel{\frac{di}{di}} - 4\frac{dr}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di}$

En $i = i_m$: $\frac{dD}{di}(i_m) = 0$ donc $2 - 4\frac{dr}{di}(i_m) = 0$

donc $\frac{dr}{di}(i_m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\cos i_m}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_m}{n^2}}} = \frac{1}{2}}$

9) Il faut isoler $\cos^2 i_m$ dans la relation de la question 8. On passe au carré : $\dfrac{\cos^2 i_m}{n^2} \dfrac{1}{1-\frac{\sin^2 i_m}{n^2}} = \dfrac{1}{4}$.

Donc $\cos^2 i_m = \dfrac{n^2}{4}\left(1-\dfrac{\sin^2 i_m}{n^2}\right)$

$= \dfrac{n^2}{4} - \dfrac{1}{4}\sin^2 i_m$.

On peut remplacer $\sin^2 i_m$ par $\cos^2 i_m$ avec $\sin^2 i_m = 1-\cos^2 i_m$.

$\Rightarrow \cos^2 i_m = \dfrac{n^2}{4} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\cos^2 i_m$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\cos^2 i_m = \dfrac{n^2-1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\cos^2 i_m = \dfrac{n^2-1}{3}}$

10) On reprend l'expression de D : $D = \pi + 2i - 4r$.

En $i = i_m$: $D_m = \pi + 2i_m - 4r(i_m)$

avec $\begin{cases} i_m = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{n^2-1}{3}}\right) & (q\ 9) \\ r(i_m) = \arcsin\left(\dfrac{\sin i_m}{n}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{4-n^2}{3n^2}}\right) \end{cases}$

Car $\dfrac{\sin i_m}{n} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 i_m}}{n} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{n^2-1}{3}}{n^2}} = \sqrt{\dfrac{3-n^2+1}{3n^2}} = \sqrt{\dfrac{4-n^2}{3n^2}}$

Donc $\boxed{D_m = 2\arccos\left(\sqrt{\dfrac{n^2-1}{3}}\right) - 4\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{4-n^2}{3n^2}}\right) + \pi}$

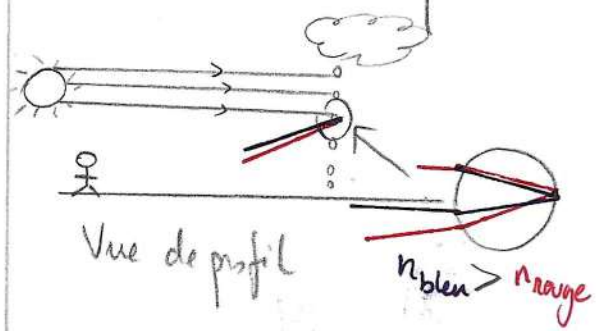
AN : $\boxed{D_m = 2{,}40 \text{ rad} = 138°}$

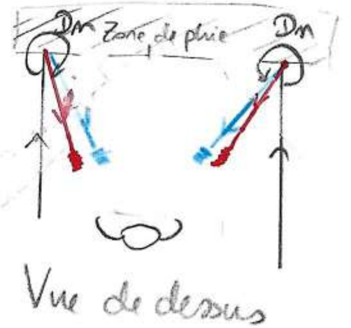
11) $[A] = [n] = 1$ pas de dimension.

$\dfrac{[B]}{[\lambda^2]} = [n] = 1$ donc $[B] = [\lambda^2] = L^2$

Si $\lambda \nearrow$, $n \searrow$. Le rouge est donc moins réfracté que le bleu.

12) Deux schémas pour mieux visualiser :





Toutes les gouttes d'eau étant ~ identiques, elles se comportent toutes comme celle des q. 3 → 10, en réfractant la lumière à D_m constant. Cependant D_m dépend de λ, donc les ≠ composantes de la lumière du Soleil sont réfractées avec un D_m légèrement différent.

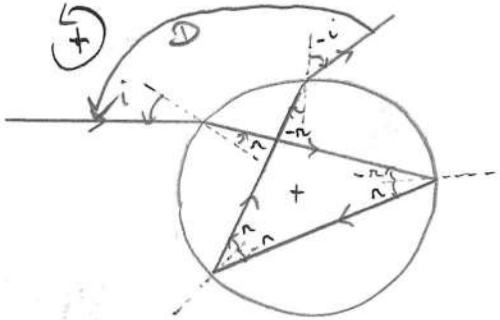
→ Il faut se placer dos au Soleil pour voir les rayons sortants issus de rayons // à l'axe de la goutte d'eau

→ Le rouge se situe à l'ext. de l'arc car $n(\text{rouge}) < n(\text{bleu})$

→ L'arc a un diamètre angulaire approximativement égal à $\boxed{180° - D_m \simeq 42°}$. On pourrait d'ailleurs calculer la largeur de l'arc en calculant D_m (bleu) − D_m (rouge)

Partie 2 - Second arc

13)



(on s'inspire fortement de la question 4)

14) Même raisonnement que la question 5, sauf qu'on ajoute une réflexion, qui dévie de $\pi - 2r$ supplémentaires

$$D' = \pi + 2i - 4r + \pi - 2r = 2\pi + 2i - 6r$$

$\boxed{D' = 2i - 6r}$ (les angles étant définis modulo 2π)

15) $\frac{dr}{di}$ est toujours égal à la même chose que dans la 1ère partie. $\frac{dD'}{di} = 0 = 2\frac{di}{di} - 6\frac{dr}{di}$

donc $\frac{dr}{di} = \frac{1}{3} \iff \frac{\cos i_m}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_m}{n^2}}} = \frac{1}{3}$

On passe au carré, et on utilise $\cos^2 i_m = 1 - \sin^2 i_m$

$$\hookrightarrow \frac{1 - \sin^2 i_m}{n^2} = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{\sin^2 i_m}{n^2}\right)$$

$$\iff 1 - \sin^2 i_m = \frac{n^2}{9} - \frac{1}{9}\sin^2 i_m$$

$$\iff \frac{8}{9}\sin^2 i_m = \frac{9 - n^2}{9}$$

$$\iff \boxed{\sin i_m = \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}}$$

16) On a $\begin{cases} i_m = \arcsin\left(\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}\right) \\ r(i_m) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{9-n^2}{8n^2}}\right) \end{cases}$

Donc $D'_M = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}\right) - 6\arcsin\left(\sqrt{\frac{9-n^2}{8n^2}}\right)$

$$\boxed{D_M' = -130°}$$

Cette fois-ci, $D_M' < 0$: l'arc-en-ciel sera inversé (bleu à l'extérieur et rouge à l'intérieur). $|D_M'| < |D_M|$, donc cet arc sera plus grand angulairement que l'arc primaire (son diamètre angulaire sera $180° - |D_M'| \simeq 50°$, 8° de plus que l'arc primaire). Il sera moins lumineux car, à l'issue des 2 réflexions, davantage de lumière aura été réfractée en dehors de la goutte. Enfin, les deux arcs sont séparés par une bande plus sombre (car pas de lumière), de quelques ° de largeur angulaire. La bande d'Alexandre