DM 2 - Optique géométrique

Résoudre les exercices de ce sujet sur ***copies doubles****. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. S'agissant d'un devoir maison, n'hésitez pas à travailler avec votre cours à portée de main, mais assurez-vous d'y réfléchir par vous-mêmes !*

Date limite : Mardi 1 Octobre.

Exercice 1 - Encombrement d'un microscope optique

Un microscope optique est constitué de deux lentilles convergentes : un objectif L_1 de centre O_1 et de focale $f'_1 = 5{,}00\,\mathrm{mm}$, et un oculaire L_2 de centre O_2 et de focale $f'_2 = 25{,}0\,\mathrm{mm}$, de même axe optique. L'ensemble est réglé de sorte à produire une image $\overrightarrow{A'B'}$ à l'infini d'un objet $\overrightarrow{AB}$ perpendiculaire à l'axe optique et situé à $\overline{AF_1} = 0{,}10\,\mathrm{mm}$ du foyer objet de L_1.

1. Justifier que l'utilisateur du microscope n'a pas besoin d'accommoder pour observer l'image de $\overrightarrow{AB}$.
2. On définit l'encombrement du microscope comme $\Delta = \overline{O_1O_2}$. Exprimer Δ en fonction de f'_1, f'_2 et $\overline{F'_1A_1}$, où A_1 est l'image de A par la lentille L_1.
3. En utilisant une relation de conjugaison (cf. cours), calculer $\overline{F'_1A_1}$, puis en déduire Δ. Faire l'application numérique.

Exercice 2 - Arcs-en-ciel

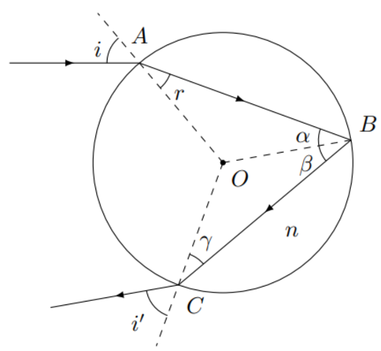
L'objectif de cet exercice est de modéliser ce qu'il se passe optiquement lorsque la lumière du Soleil entre dans une gouttelette d'eau, pour expliquer la formation des arcs-en-ciel. La première partie concerne l'arc-en-ciel simple, la deuxième va un peu plus loin et justifier l'existence d'un deuxième arc-en-ciel plus ténu.

Partie 1 - Premier arc

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction entre deux milieux homogènes et isotropes, d'indices optiques n_1 et n_2.
2. Expliquer ce qu'est le phénomène de réflexion totale. Déterminer l'angle d'incidence limite i_{lim} au-delà duquel il y a réflexion totale lorsque les deux milieux sont l'eau d'indice $1,33$ et l'air d'indice 1.

Un arc-en-ciel se produit lorsque les rayons du Soleil sont réfléchis par des gouttes d'eau en suspension dans l'air. On supposera que les gouttelettes sont sphériques. Le schéma ci-contre montre le trajet suivi par un rayon lumineux subissant *exactement une réflexion* à l'intérieur de la goutte d'eau. On note n l'indice optique de l'eau.

Les angles sur le schéma ne sont pas orientés : charge à vous de les orienter dans le bon sens !



3. Donner la relation entre i, r et n.
4. Justifier que la réflexion en B puisse être totale, puis montrer que $i' = -i$, en raisonnant successivement sur les angles α, β et γ.
5. On appelle D l'angle de déviation : c'est l'angle entre le rayon incident en A et le rayon sortant en C. Montrer que $D = \pi + 2i - 4r$.

Les rayons du Soleil arrivent parallèlement les uns aux autres, et éclairent toute la goutte : cela signifie que tous les angles d'incidence i entre 0 et $\pi/2$ sont couverts par ces rayons. L'objectif est de trouver quel rayon parmi tous ceux-là est le moins dévié : cela correspond à *l'angle de déviation minimum* D_m de la fonction $D(i)$.

6. On considère que l'angle de réfraction est une fonction de l'angle d'incidence : $r(i)$. Donner la fonction $r(i)$, puis calculer sa dérivée $\dfrac{dr}{di}$. On donne : $\dfrac{d\arcsin x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
7. Soit i_m l'angle d'incidence du rayon pour lequel l'angle de déviation minimum D_m est atteint. Justifier que cela revient à résoudre l'équation :
$$\frac{dD}{di}(i_m) = 0$$
8. En déduire que :
$$\frac{\cos i_m}{n\sqrt{1-\left(\frac{\sin i_m}{n}\right)^2}} = \frac{1}{2}$$
9. En déduire l'expression de $\cos^2(i_m)$ en fonction de n.
10. Montrer que la déviation minimale vaut :
$$D_m = D(i_m) = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right) - 4\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}\right) + \pi$$
Calculer la valeur numérique de D_m pour $n = 1,33$.
11. L'eau est en fait un milieu dispersif : son indice optique n'est pas le même suivant la longueur d'onde de la lumière qui la traverse. On admet que cet indice optique suit la loi de Cauchy :
$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$
avec A et B des constantes positives. Donner la dimension de A et B, ainsi que le sens de variation de n avec λ.
12. A partir des résultats des questions précédentes, expliquer le principe des arcs-en-ciel. En particulier, expliquer pourquoi il faut se placer dos au Soleil pour les observer, quelle couleur se trouve à l'extérieur, et pourquoi leur diamètre angulaire est toujours similaire. *On pourra s'appuyer sur des schémas !*

Partie 2 - Second arc

La première partie de l'exercice n'a traité que du cas d'un rayon lumineux subissant une seule réflexion à l'intérieur de la goutte d'eau. En réalité, certains rayons peuvent subir une deuxième réflexion sur le dioptre eau-air, puis sortir par réfraction à la rencontre suivante du dioptre.

13. Faire un schéma *clair* de la goutte, et d'un rayon subissant deux réflexions. Indiquer sur ce schéma les différents angles.
14. Justifier que l'angle de déviation entre le rayon entrant et le rayon sortant de la goutte après deux réflexions vaut maintenant $D' = 2\pi + 2i - 6r = 2i - 6r$ (à 2π près).
15. Calculer $\dfrac{dD'}{dr}$, et montrer que cette dérivée s'annule si $\sin i = \sqrt{\dfrac{9-n^2}{8}}$.
16. On admet que, pour cette valeur particulière, D' est maximal. Calculer numériquement D'_M, la valeur de ce maximum, pour $n = 1,33$, et comparer avec la valeur de D_m dans la partie précédente. Expliquer alors pourquoi on voit un second arc-en-ciel, pourquoi ce dernier est moins lumineux que le premier, et pourquoi les deux arcs sont séparés par une bande moins lumineuse, appelée *bande sombre d'Alexandre*.