

Ex. 1 - Le système d'unités de Planck.

$$1) F = \frac{G m_1 m_2}{d^2} \Rightarrow [G] = \frac{[F][d^2]}{[m]^2}$$

$$[d^2] = L^2, [m] = M, [F] = \left[m \frac{dv}{dt} \right] = MLT^{-2}$$

$$\hookrightarrow [G] = MLT^{-2} L^2 M^{-2}$$

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2} \quad G \text{ se mesure en } m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$$

$$2) [c] = LT^{-1}$$

$$[h] = [\text{Energie}] \cdot T = \left[\frac{1}{2} mv^2 \right] \cdot T \Rightarrow [h] = ML^2 T^{-1}$$

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

3) On pose $l_p = c^\alpha h^\beta G^\gamma$ avec (α, β, γ) à déterminer à l'aide des dimensions.

$$[l_p] = L = [c]^\alpha [h]^\beta [G]^\gamma$$

$$\Rightarrow L = (LT^{-1})^\alpha (ML^2 T^{-1})^\beta (L^3 M^{-1} T^{-2})^\gamma$$

$$\Rightarrow L = L^{\alpha+2\beta+3\gamma} M^{\beta-\gamma} T^{-\alpha-\beta-2\gamma}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma=1 \\ \beta-\gamma=0 \\ -\alpha-\beta-2\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\gamma \\ \beta=-\frac{1}{3}\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1-\frac{5}{3})=1 \\ \beta=\gamma \\ \beta=-\frac{1}{3}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{3}{2} \\ \beta=\frac{1}{2} \\ \gamma=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } l_p = c^{-3/2} h^{1/2} G^{1/2} \Rightarrow l_p = \sqrt{\frac{hc}{G}}$$

$$\text{A.N. } l_p = \sqrt{\frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}}{(3,00 \cdot 10^8)^3}} = 1,61 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

4) Même raisonnement : $m_p = c^\alpha h^\beta G^\gamma$

$$\hookrightarrow [m_p] = M = L^{\alpha+2\beta+3\gamma} M^{\beta-\gamma} T^{-\alpha-\beta-2\gamma}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ \beta-\gamma=1 \\ -\alpha-\beta-2\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1-3\gamma)+2(1+\gamma)+3\gamma=0 \\ \beta=1+\gamma \\ \alpha=-1-3\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-1/2 \\ \beta=1/2 \\ \alpha=1/2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } m_p = c^{1/2} h^{1/2} G^{-1/2} \Rightarrow m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}}$$

$$\text{A.N. } m_p = \sqrt{\frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}}{3,00 \cdot 10^8}} = 2,17 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$$

5) $[c] = LT^{-1}$ Donc $t_p = \frac{l_p}{c}$ convient

$\Rightarrow t_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{c^5}}$ AN: $t_p = 5,37 \cdot 10^{-44} s$

6) l_p et t_p sont très faibles en comparaison des valeurs de temps/longueurs usuelles. Si t_p est "la durée la plus faible physiquement mesurable", alors l_p est "la distance la plus faible physiquement mesurable".

7) Conversion en m/s: $/3,60 \Rightarrow v = 1,92 \cdot 10^5 m \cdot s^{-1}$

En unités de Planck: On divise par $l_p \cdot t_p^{-1} = c$

$\Rightarrow v = 6,40 \cdot 10^{-4} l_p \cdot t_p^{-1} = 6,40 \cdot 10^{-4} c$ ($= 0,664\%$ de c)

Exprimer v en unités de Planck revient à l'exprimer en termes de c , la constante fonda. ayant servi à définir ces unités

8) Pour chaque grandeur, on exprime sa dimension en fonction de L, T, M , puis on remplace par l_p, t_p, m_p . (utilisons $t_p = \frac{l_p}{c}$ aide à aller plus vite)

• Force de Planck: $[F_p] = MLT^{-2} \rightarrow F_p = \frac{m_p l_p}{t_p^2} = \frac{m_p}{l_p} c^2 = \frac{c^4}{g}$

AN: $F_p = 1,21 \cdot 10^{44} N$ (force mesurable maximale)

• Energie de Planck: $[E_p] = ML^2 T^{-2} = [F] L \rightarrow E_p = F_p l_p = c^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{g}}$

AN: $E_p = 1,96 \cdot 10^9 J$

• Masse vol. de Planck: $[p_p] = ML^{-3} \rightarrow p_p = \frac{m_p}{l_p^3} = \frac{c^5}{\hbar g^2}$

AN: $p_p = 5,20 \cdot 10^{96} kg \cdot m^{-3}$ (Masse volumique maximale mesurable)

• Pression de Planck: $[P_p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[F]}{L^2} \rightarrow P_p = \frac{F_p}{l_p^2} = \frac{c^7}{\hbar g^2}$

AN: $P_p = 4,68 \cdot 10^{113} Pa$

9) $E(SI) = m(SI) c^2$. Dans les unités de Planck: $\begin{cases} E(UP) = \frac{E(SI)}{E_p} \\ m(SI) = \frac{m(UP)}{m_p} \end{cases}$

$\hookrightarrow E(UP) \cdot E_p = m(UP) \cdot m_p c^2$

$\Leftrightarrow E(UP) = m(UP) \cdot \frac{m_p c^2}{E_p}$

On, $\frac{m_p c^2}{E_p} = \sqrt{\frac{c \hbar}{g}} \cdot c^2 \cdot \frac{1}{c^2 \sqrt{\frac{c \hbar}{g}}} = 1$

$\Rightarrow E(UP) = m(UP)$: on a fait "disparaître" c (car $c = 1 l_p t_p^{-1}$)

3 $\rightarrow$ Travailler en UP permet de ne pas avoir les const. fonda dans les calculs

10) $\sigma = \frac{c^3 A}{4gh}$. Seule A est à exprimer en UP. $A(UP) = \frac{A(ST)}{l_p^2}$

$\Rightarrow \sigma(UP) = \frac{c^3}{4gh} l_p^2 A(UP) = \frac{c^3}{4gh} \cdot \frac{gh}{c^3} A(UP)$

$\sigma(UP) = \frac{A(UP)}{1}$: Les constantes c, g et h ont disparu (elles valent "1" en UP).

11) Il faudrait définir une température de Planck T_p , telle que $k_B = E_p \cdot T_p^{-1}$ (et vaudrait donc 1 dans les unités de Planck)

12) $T_p = \frac{E_p}{k_B} = \frac{c^2}{k_B} \sqrt{\frac{ch}{g}} \Rightarrow T_p = \sqrt{\frac{hc^5}{g k_B^2}}$

A.N.: $T_p = 1,42 \cdot 10^{32} \text{ K}$.

Exercice 2 - Analyse dimensionnelle

1) On peut proposer la relation: $F = k \rho^\alpha S^\beta v^\gamma$ avec α, β et γ des exposants à déterminer.

$[F] = MLT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$; $[S] = L^2$, $[v] = LT^{-1}$

Donc: $MLT^{-2} = M^\alpha L^{-3\alpha+2\beta+\gamma} T^{-\gamma}$

On résout le système:
$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ -1 = -3\alpha + 2\beta + \gamma \\ -\gamma = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1+3-2}{2} = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Donc $F = k \rho S v^2$

2) 1 $\rightarrow$ fausse car $\frac{R_1 R_2^2}{[R]^3} + \frac{3R_2 R_3}{[R]^2}$; 3 $\rightarrow$ fausse car $\left[\frac{\dots}{\dots}\right] = 1 \neq [R]$

Donc seule la 2^e formule peut être correcte.

3) $[P] = [\sigma][S][T]^\alpha$, seuls $[\sigma]$ et $[T]$ contiennent la dimension Θ .

$\hookrightarrow 0 = -4 + \alpha \Rightarrow \alpha = 4$ | Donc $P = \sigma S T^4$

$T = \left(\frac{P}{\sigma S}\right)^{1/4} \rightarrow \text{A.N. } T = \left(\frac{10 \cdot 10^3}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 4,0}\right)^{1/4} = 4,6 \cdot 10^2 \text{ K}$
(2cs)