DM 1 - Analyse dimensionnelle, lois de l'optique géométrique

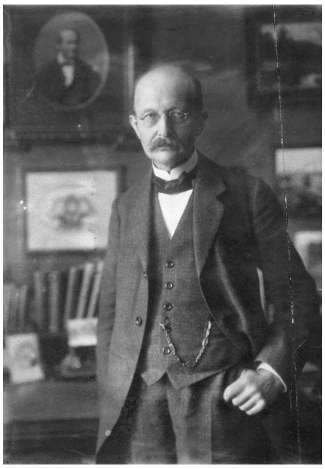
Résoudre les exercices de ce sujet sur ***copies doubles****. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. S'agissant d'un devoir maison, n'hésitez pas à travailler avec votre cours à portée de main, mais assurez-vous d'y réfléchir par vous-mêmes !*

Date limite : Mardi 10 Septembre.

1 Le système d'unités de Planck

Nous utilisons quotidiennement le Système International des unités, à tel point qu'il est devenu naturel de l'utiliser plutôt d'autres systèmes d'unités (ceux qui auront essayé de reproduire des recettes de cuisine dont les quantités sont exprimées en unités impériales comprendront...). Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que la définition de ses unités, bien que très précise, est arbitraire.

Par exemple, le mètre est défini depuis 1983 comme la distance parcourue par la lumière pendant une seconde pendant une durée $\Delta t = 1/299\,792\,458\,\mathrm{s}$. Le choix de cette constante semble arbitraire : c'est en réalité la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide, telle que mesurée plusieurs décennies plus tôt : choisir cette valeur de Δt assure que la nouvelle définition du mètre soit cohérente avec la précédente. Utiliser une constante de la physique, c, permet donc de s'assurer que la définition du mètre soit immuable.



Max Planck, physicien allemand, a présenté le système naturel d'unités qui porte aujourd'hui son nom en 1899 à l'Académie des Sciences de Prusse.

Dans cet exercice, nous allons faire le raisonnement inverse : utiliser les constantes fondamentales de la physique pour définir un *système d'unités naturelles*. Par exemple, exprimer une vitesse dans ce système d'unités reviendra à l'exprimer en termes de la vitesse fondamentale c. Pour construire le *système d'unités de Planck*, un exemple de ces systèmes d'unités naturelles, commençons par considérer les constantes fondamentales suivantes :

- La vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
- La constante de Planck réduite: $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$.
- La constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} [??]$

1. Rappeler la loi de la gravitation universelle, qui exprime l'intensité de la force gravitationnelle F subie par un objet de masse m_1 à cause de l'influence d'un objet de masse m_2 éloigné d'une distance d. En déduire l'unité de $\mathcal{G}$ dans le Système International.
2. Exprimer les dimensions de c, $\hbar$ et $\mathcal{G}$ en fonction uniquement des trois dimensions suivantes : longueur L, masse M et temps T.
3. En vous aidant de la question précédente, former une grandeur l_p, dite *longueur de Planck*, qui a la dimension d'une longueur et qui ne s'exprime que en fonction de c, $\hbar$ et $\mathcal{G}$. Déterminer sa valeur numérique dans le Système International.
4. De la même manière, former une grandeur m_p, dite *masse de Planck*, qui a la dimension d'une masse et qui ne s'exprime qu'en fonction de c, $\hbar$ et $\mathcal{G}$. Déterminer sa valeur numérique dans le Système International.
5. Comment peut-on définir un *temps de Planck* t_p à partir de l_p ? Donner son expression en fonction de c, $\hbar$ et $\mathcal{G}$, ainsi que sa valeur numérique dans le Système International.

6. Un commentaire sur les valeurs : que pensez-vous des valeurs numériques de l_p et de t_p dans le Système International[1] ? Si on admet que t_p est "la plus petite durée physiquement mesurable", comment interpréter l_p ?
7. *Application :* la sonde Parker est l'objet humain le plus rapide jamais envoyé dans l'espace : sa vitesse actuelle est $v = 6{,}92 \cdot 10^5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Exprimer sa vitesse en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, puis en unités de Planck. Quelle interprétation peut-on donner de la valeur de v dans le système de Planck ?
8. *Unités dérivées.* Définir les unités dérivées suivantes dans le système de Planck, en vous inspirant des définitions habituelles. Donner à chaque fois leur expression littérale, ainsi que leur valeur dans le Système International.
   - La force de Planck F_p.
   - L'énergie de Planck E_p.
   - La masse volumique de Planck ρ_p
   - La pression de Planck P_p.

   En vous inspirant de la question 6, proposer une interprétation physique de F_p et de ρ_p.
9. *Intérêt mathématique des unités de Planck.* On considère la très célèbre relation d'Einstein pour l'énergie de masse d'une particule au repos :
$$E(\mathrm{SI}) = m(\mathrm{SI})c^2$$
   où (SI) signifie qu'on a exprimé les grandeurs dans le Système International. On note $E(\mathrm{UP})$ et $m(\mathrm{UP})$ ces mêmes grandeurs exprimées dans les unités de Planck. Réécrire la relation dans les unités de Planck. A votre avis, quel est l'intérêt "calculatoire" des unités de Planck ?
10. Appliquer l'idée de la question 9 en écrivant dans les unités de Planck la formule de Hawking-Bekenstein, donnant l'entropie adimensionnée σ d'un trou noir en fonction de l'aire de sa surface A :
$$\sigma = \frac{c^3 A}{4\mathcal{G}\hbar}$$
11. En réalité, l'entropie est $S = k_B\sigma$, avec $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. Que faudrait-il faire pour que S n'ait pas de dimension, dans le système d'unités de Planck ?
12. On souhaite définir une *température de Planck* T_p. Proposer une expression de T_p en fonction de $\hbar$, c, k_B et $\mathcal{G}$, et calculer sa valeur numérique.

2 Analyse dimensionnelle

1. Déterminer, à une constante multiplicative k près, l'expression de la force F exercée par une hélice sur le fluide dans lequel elle se déplace sachant qu'elle dépend de la masse volumique du fluide ρ, de l'aire balayée par l'hélice S et de la vitesse relative v du point d'application de la force F par rapport au fluide.
2. Un étudiant résout un exercice d'électrocinétique, et calcule la résistance équivalente R_{eq} d'un ensemble de résistances notées R_i. Parmi les suivantes, quelle est la seule formule qui peut être correcte ?
$$R_{eq} = \frac{R_1R_2^2 + 3R_2R_3}{R_1^2 + R_2^2} \quad ; \quad R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3^2} \quad ; \quad R_{eq} = \frac{R_1^2R_2 + 3R_2R_3^2}{R_1R_2R_3}$$
3. La puissance P émise par un corps noir de surface S chauffé à une température T est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann : $P = \sigma S T^\alpha$ avec $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-4}$

   Déterminer la valeur de l'exposant α, puis calculer la température nécessaire pour qu'une plaque de $4{,}0\,\mathrm{m}^2$ de surface émette $P = 10\,\mathrm{kW}$.

[1] Si vous vous en souvenez d'ici-là, nous comprendrons tout à la fin de l'année, dans le chapitre d'introduction à la mécanique quantique, la raison de cette interprétation.