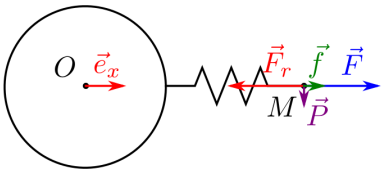
Concours blanc 1 - Corrigé

Partie 1 - Le bleu du ciel

1. Schéma ci-contre. Ce système est équivalent au système masse-ressort : la force de Coulomb joue le rôle de force de rappel du ressort. La force de frottement est représentée en supposant que l'électron est en train de se déplacer vers la gauche.



2. **Système :** électron.
Référentiel : laboratoire, supposé galiléen. **Bilan des forces :**

   - Force de rappel $\vec{F}_r = -k\overrightarrow{OM} = -kx\,\vec{e}_x$
   - Force de frottements $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$
   - Force de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{E} = -eE_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$
   - Poids $\vec{P} = m\vec{g}$

   On peut calculer numériquement $\|\vec{P}\| = 8{,}9 \cdot 10^{-30}$ N, qui est extrêmement faible devant $\|\vec{F}\| \simeq eE_0 = 1{,}12 \cdot 10^{-17}$ N : on peut bien négliger le poids.

3. La seconde loi de Newton s'écrit

$$m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_r + \vec{f} + \vec{P} \simeq \vec{F} + \vec{F}_r + \vec{f}$$

   D'où, en remplaçant les forces par leurs expressions :

$$m_e\ddot{x}\,\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x - eE_0\cos(\omega t)\,\vec{e}_x - \alpha\dot{x}\,\vec{e}_x$$

   La projection sur $\vec{e}_x$ est immédiate :

$$\boxed{m_e\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = -eE_0\cos(\omega t)}$$

4. L'excitation (fournie par la force de Lorentz $\vec{F}$) est sinusoïdale, et le système est linéaire, donc la réponse du système est également sinusoïdale : l'électron aura un mouvement oscillant de même pulsation en régime établi, d'où la forme proposée par l'énoncé. La recherche de x_0 et φ sera plus aisée en passant en notation complexe, car cela transformera l'équation différentielle en équation algébrique : il suffit de poser

$$\boxed{\underline{x}(t) = x_0 e^{j\varphi}e^{j\omega t}}$$

5. On change les dérivées par des multiplications par $j\omega$, et $\cos(\omega t)$ par $e^{j\omega t}$:

$$-m_e\omega^2\underline{x}(t) + j\alpha\omega\underline{x}(t) + k\underline{x}(t) = -eE_0e^{j\omega t}$$

   Il suffit alors de factoriser par $\underline{x}(t)$ à droite et de diviser des deux côtés :

$$\boxed{\underline{x}(t) = \frac{-eE_0}{k - m_e\omega^2 + j\alpha\omega}\,e^{j\omega t}}$$

6. ω_0 est la pulsation propre et ζ le facteur d'amortissement.

$$\underline{x}(t) = \frac{-eE_0 e^{j\omega t}}{m_e} \frac{1}{\frac{k}{m_e} - \omega^2 + j\frac{\alpha\omega}{m_e}}$$

On reconnaît $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m_e}$ et $\dfrac{\alpha\omega}{m_e} = 2\zeta\omega\omega_0$, et donc :

$$\boxed{\underline{x}(t) = \frac{-eE_0 e^{j\omega t}}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega_0\omega}}$$

7. On note $\underline{x}(t) = \underline{x}e^{j^omegat}$, en posant $\underline{x} = x_0 e^{j\varphi}$. On peut déterminer x_0 et φ par le calcul du module et de l'argument de $\underline{x} = \frac{-eE_0}{m_e}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2j\zeta\omega_0\omega}$.

- Le module donne

$$\boxed{x_0 = |\underline{x}| = \frac{eE_0}{m_e} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \zeta^2\omega_0^2\omega^2}}}$$

- L'argument s'écrit

$$\varphi = \arg(\underline{x}) = \arg\left(\frac{-eE_0}{m_e}\right) - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega\omega_0)$$

D'une part, $\arg\left(\dfrac{-eE_0}{m_e}\right) = \pi$ car c'est un réel négatif. D'autre part,

$$\arg(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega\omega_0) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \text{si } \omega_0 > \omega \\ \pi - \arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \text{si } \omega_0 < \omega \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} \pi - \arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \text{si } \omega_0 > \omega \\ \arctan\left(\dfrac{2\zeta\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \text{si } \omega_0 < \omega \end{cases}}$$

8. $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, donc en passant en complexes,

$$\boxed{\underline{a_x} = -\omega^2\underline{x}}$$

L'amplitude de l'accélération s'obtient en calculant le module, ce qui donne immédiatement

$$\boxed{a_{x,0} = \omega^2 x_0 = \frac{eE_0\omega^2}{m_e} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \zeta^2\omega_0^2\omega^2}}}$$

9. $\omega = 2\pi\nu$ et $\nu = \dfrac{c}{n\lambda} = \dfrac{c}{\lambda}$ dans l'air. Avec $\lambda_1 = 800\,\text{nm}$ (plus grande longueur d'onde pour plus petite pulsation) et $\lambda_2 = 400\,\text{nm}$, on obtient

$$\boxed{\omega_1 = 2{,}36 \cdot 10^{15}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad ; \quad \omega_2 = 4{,}71 \cdot 10^{15}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

10. Dans le dénominateur de $a_{x,0}$, on peut remplacer $\omega_0^2 - \omega^2 \simeq \omega_0^2$ car $\omega << \omega_0$. On a alors

$$a_{x,0} \simeq \frac{eE_0\omega^2}{m_e}\frac{1}{\sqrt{\omega^4 + \zeta^2\omega^2\omega_0^2}} \simeq \frac{eE_0\omega^2}{m_e\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\zeta^2\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Or, $\zeta << 1$ et $\omega << \omega_0$, donc $\dfrac{\zeta^2\omega^2}{\omega_0^2} << 1$. Ainsi,

$$\boxed{a_{x,0} \simeq \frac{eE_0\omega^2}{m_e\omega_0^2} \propto \omega^2}$$

11. Les électrons excités par $\vec{E}$ (à ω fixé) sont accéléras à $a_x \propto \omega^2$, et émettent donc une puissance lumineuse

$$\mathcal{P} \propto a_{x,0}^2 \propto \omega^4$$

Les plus grandes fréquences (donc le bleu) sont beaucoup plus facilement absorbées, puis réémises dasn toutes les directions par les électrons de valence des molécules de l'atmosphère. Le ciel nous parait donc bleu, car c'est cette lumière *diffusée* que l'on observe. C'est la *diffusion Rayleigh.*

Remarque culturelle 1 : c'est pour la même raison que le ciel devient rouge lors du coucher de soleil. On observe cette fois-ci la lumière directement transmise, qui a été "privée" du bleu à cause de la diffusion !
Remarque culturelle 2 : ce phénomène se produit dans l'atmosphère : il n'y a donc pas de diffusion Rayleigh en l'absence d'atmosphère. Le ciel sur la Lune est donc noir, et non bleu. De même, le ciel nocturne est noir car peu de lumière à diffuser (seule la lumière de la Lune diffuse, d'où le "bleu nuit"). Par contre, le ciel de Mars est aussi bleu, en l'absence de poussière rouge en suspension !

12. (a) On enlève la force de Lorentz, l'équation devient donc

$$m_e\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

On peut diviser par m_e, et reconnaître

$$\frac{k}{m_e} = \omega_0^2 \quad ; \frac{\alpha}{m_e} = 2\zeta\omega_0$$

de sorte que

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

(b) Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant est

$$\Delta = 4\omega_0^2(\zeta^2 - 1)$$

Comme $\zeta << 1$, $\Delta < 0$ et les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes :

$$r_\pm = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm j\sqrt{4\omega_0^2(1-\zeta^2)}}{2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

On pose alors $K = \zeta\omega_0$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$, de sorte que la solution générale de l'équation s'écrit

$$x(t) = \lambda e^{r_+ t} + \mu e^{r_- t} = e^{-Kt}\left[\lambda e^{i\Omega t} + \mu e^{-i\Omega t}\right]$$

Quitte à changer les constantes λ et μ, on peut réécrire la solution sous la forme

$$x(t) = e^{-Kt}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

Reste à appliquer les deux conditions initiales. Pour cela, on a besoin de la dérivée de x :

$$\dot{x}(t) = -Ke^{-Kt}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + e^{-Kt}\Omega\left[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right]$$

Or, $K << \omega$ car $\zeta << 1$, donc on peut faire l'approximation

$$\dot{x}(t) \simeq e^{-Kt}\Omega\left[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right]$$

L'application des conditions initiales donne alors

$$\left\{\begin{array}{ll} x(0) & = x_i = A \\ \dot{x}(0) & = 0 \simeq -\Omega B \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} A & = x_i \\ B & = 0 \end{array}\right.$$

et donc finalement :

$$\boxed{x(t) = x_i\cos(\Omega t)e^{-Kt}}$$

Le mouvement est pseudo-périodique.

13. Par définition,

$$\boxed{E_p(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kx_i^2\cos^2(\Omega t)e^{-2Kt}}$$

et

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m_e\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}m_e x_i^2\Omega^2\sin^2(\Omega t)e^{-2Kt}$$

Or, $\Omega^2 \simeq \omega_0^2$ car $\zeta << 1$, et $m_e\omega_0^2 = k$. Ainsi,

$$\boxed{E_c(t) = \frac{1}{2}kx_i^2\sin^2(\Omega t)e^{-2Kt}}$$

On peut alors calculer la somme de ces deux énergies

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kx_i^2e^{-2Kt}\left(\cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t)\right)$$

qui se simplifie avec l'identité trigonométrique. En remplaçant K par son expression, on obtient

$$\boxed{E_m(t) = \frac{1}{2}kx_i^2e^{-2\zeta\omega_0 t}}$$

14. On applique directement la définition :

$$\begin{aligned}
\Delta E_m &= E_m(t+T) - E_m(t) \\
&= \frac{1}{2}kx_i^2\left(e^{-2\zeta\omega_0(t+T)} - e^{-2\zeta\omega_0 t}\right) \\
&= \frac{1}{2}kx_i^2e^{-2\zeta\omega_0 t}\left(e^{-2\zeta\omega_0 T} - 1\right) \\
&= E(t)\left(e^{-2\zeta\omega_0 T} - 1\right)
\end{aligned}$$

Or, $\zeta\omega_0 T << 1$, on peut donc faire l'approximation

$$e^{-2\zeta\omega_0 T} \simeq 1 - 2\zeta\omega_0 T$$

et donc

$$\Delta E_m = -2\zeta\omega_0 T E(t)$$

Or, toujours avec la même approximation, on peut simplifier T :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\frac{1}{2}\zeta^2\right)$$

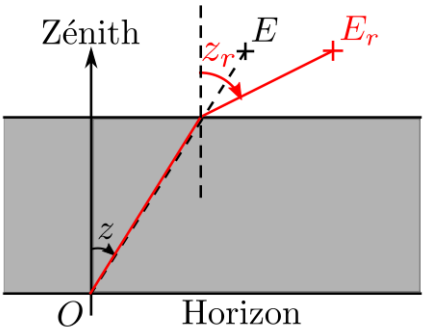
Le deuxième terme étant d'ordre 2 en ζ, on peut le négliger, et donc $T \simeq \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. En remplaçant T dans l'expression de ΔE_m, on aboutit à l'expression de l'énoncé :

$$\Delta E_m = -4\pi\zeta E_m(t)$$

Plus ζ est grand, et plus E_m diminue fortement sur une pseudo-période : on comprend qu'il soit appelé facteur d'amortissement !

Partie 2 - Observer le ciel nocturne : position et couleur des étoiles

13. Schéma ci-contre. Le rayon "semble" nous provenir de E, mais le rayon réel provient de E_r, avec un angle z_r par rapport à la normale. On a bien $z_r > z$, car l'indice de réfraction de l'air est plus grand que celui du vide.



14. La loi de Snell-Descartes donne

$$n\sin z = \sin z_r \quad \Longrightarrow \quad \Longrightarrow \boxed{z_r = \arcsin(n\sin z)}$$

15. On obtient numériquement, en calculant z_r avec 5 chiffres significatifs (même si z n'est donné qu'avec deux, on ne voit rien sinon !)

$$\boxed{z_r = 30,009° \quad ; \quad \Delta z = (9,9\cdot 10^{-4})\,° = 35''}$$

C'est très faible, et imperceptible à l'œil nu (car le pouvoir de résolution de l'œil est de l'ordre de $1' = 60''$). Néanmoins, il faut en tenir compte lorsqu'on fait des mesures avec un instrument d'observation astronomique !

16. La propagation d'une onde se fait avec dispersion si la vitesse de phase de l'onde v_φ dépend de la fréquence. S'il n'y a pas de dispersion, la relation entre k et ω est linéaire

$$k = \frac{\omega}{c}$$

et $v_\varphi = c$ est constante.

17. $\boxed{s(x,t) = s_0\cos(\omega t - kx)}$ si l'onde se propage suivant les x croissants.

18. $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$. On linéarise le cosinus dans l'intégrale :

$$I(x) = \frac{s_0^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kx)\,dt = \frac{s_0^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1+\cos(2\omega t - 2kx)}{2}\right)dt$$

Or, $t \mapsto \cos(2\omega t - 2kx)$ est T-périodique, donc le deuxième terme s'annulera. On obtient donc

$$\boxed{I(x) = \frac{s_0^2}{2T}\int_0^T dt = \frac{s_0^2}{2}}$$

qui ne dépend pas de x : c'est cohérent, car il n'y a pas d'atténuation de l'onde lors de la propagation.

19. $\boxed{[\kappa] = L^-1}$. La formule se réécrit, en notant $\boxed{I_0 = I(x=0)}$ l'intensité de l'onde au niveau de sa source :

$$\frac{dI}{dI} = -\kappa\, dx \quad \Longrightarrow \quad \int_{I_0}^{I} \frac{d\tilde{I}}{\tilde{I}} = -\int_0^x \kappa\tilde{x}\, d\tilde{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{I(x)}{I_0}\right) = -\kappa x$$

et donc en passant à l'exponentielle,

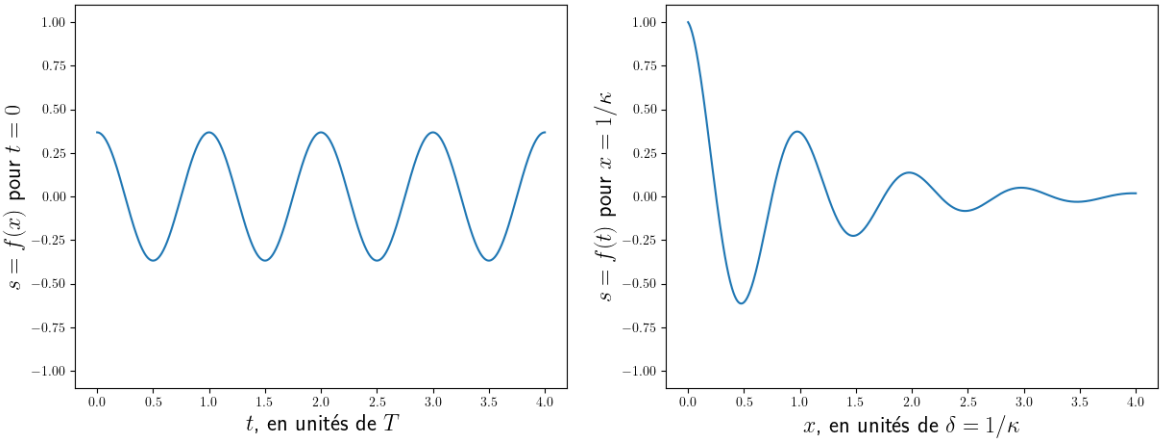
$$\boxed{I(x) = I_0 e^{-\kappa x}}$$

L'intensité décroit sur une distance caractéristique $\boxed{\delta = \frac{1}{\kappa}}$: elle est presque nulle après s'être propagée sur environ 5δ.

20. Comme $I(x) = \left\langle s(x,t)^2 \right\rangle$, on peut identifier :

- $(e^{\alpha x})^2 = e^{-\kappa x}$, donc $\boxed{\alpha = -\frac{\kappa}{2}}$.
- $\boxed{\varphi(x,t) = \omega t - kx}$ reste inchangé.

Donc $\boxed{s(x,t) s_0 e^{-\kappa x/2}\cos(\omega t - kx)}$. Les graphiques ci-dessous représentent les deux profils demandés. s est tracé en unités de s_0, c'est-à-dire que si $s = 1$ sur le graphique, cela signifie que $s = s_0$. On ne voit l'amortissement à la propagation que sur le profil spatial $s = f(x)$. Pour le profil temporel $s = f(t)$, on se trouve en un point fixe de l'espace, et on voit donc toujours la même amplitude. Cette amplitude dépend cependant du point x considéré.



21. $\kappa(\text{rouge}) < \kappa(\text{bleu})$, car $\lambda(\text{rouge}) > \lambda(\text{bleu})$. Ainsi, le rouge est moins atténué que le bleu. La couleur apparente des étoiles est donc plus "rouge" que la couleur réelle.

22. On remplace I par son expression, et on utilise le fait que $I_0 = I_{\text{ref}}$:

$$M = -2,5\log\left(\frac{I_0 e^{-\kappa d}}{I_{\text{ref}}}\right) = -2,5\log\left(e^{-\kappa d}\right)$$

En revenant à la définition du logarithme décimal,

$$\boxed{M = -2,5\frac{\ln\left(e^{-\kappa d}\right)}{\ln(10)} = \frac{2,5}{\ln(10)}\kappa d}$$

Plus M est faible, et plus l'étoile est lumineuse (en raison du signe $-$).

23. $d = d_{\text{max}}$ si $M = 6$, donc

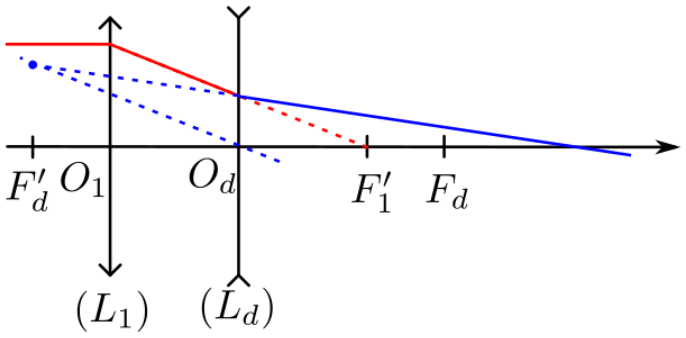
$$\boxed{d_{\text{max}} = \frac{6\ln(10)}{2,5\kappa} = 2\cdot 10^{20}\,\text{m} = 20\,000\,\text{al}}$$

car $1\,\text{al} \simeq 9\cdot 10^{15}\,\text{m}$. On ne peut donc pas distinguer les étoiles du cœur de la Voie lactée, qui sont trop éloignées de nous.

Partie 3 - Une amélioration de la lunette astronomique

24. Voir le chapitre O_3 ! $\boxed{G = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$. Il faut mieux choisir un objectif de très longue focale f_1' pour augmenter le grossissement.

25. Voir le schéma ci-dessous. Attention à la position du foyer principal image de la lentille divergente, en *amont* de la lentille !



26. Par définition, le foyer principal image du système est le point F_b' où le rayon tracé à la question 24. coupe l'axe optique. Il faut donc trouver la position de ce point. Pour cela, on utilise les relations de conjugaison : le point initial se trouvant à l'infini, on peut représenter les points conjugués les uns avec les autres comme suit :

$$\infty \xrightarrow{(L_1)} F_1' \xrightarrow{(L_d)} F_b'$$

Cela permet de ne pas se tromper en écrivant la relation de conjugaison de Descartes pour la lentille (L_d) :

$$\frac{1}{\overline{O_dF_b'}} - \frac{1}{\overline{O_dF_1'}} = \frac{1}{f_d'}$$

On souhaite calculer $f_b' = \overline{O_1F_B'} = \overline{O_1O_d} + \overline{O_dF_b'}$ par relation de Chasles. Par définition $\overline{O_dF_1'} = s$, et la relation de conjugaison donne

$$\frac{1}{\overline{O_dF_b'}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f_d'} \quad\Longrightarrow\quad \overline{O_dF_b'} = \frac{sf_d'}{s+f_d'}$$

d'où, en remplaçant dans f_b' :

$$f_b' = \overline{O_1O_d} + \frac{sf_d'}{s+f_d'}$$

Or, à nouveau avec Chasles, $\overline{O_1O_d} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'O_d} = f_1' - s$, d'où

$$f_b' = f_1' - s + \frac{sf_d'}{s+f_d'} = f_1' + \frac{-s(s+f_d') + sf_d'}{s+f_d'} = f_1' - \frac{s^2}{s+f_d'}$$

Reste à diviser dans la fraction par s au numérateur et au dénominateur :

$$\boxed{f_b' = f_1' - \frac{s}{1+\dfrac{f_d'}{s}}}$$

$f_d' < 0$ et $s < |f_d'|$, donc $1 + \dfrac{f_d'}{s} < 0$. Ainsi, $f_b' > f_1'$: la focale du doublet de Barlow est bien supérieure à celle de la lentille (L_1) seule. Cela permet d'augmenter le grossissement sans avoir à fabriquer une lentille (L_1) très peu convergente, ce qui peut être difficile. On peut même envisager de régler la distance focale f_b' en jouant sur s, et donc δ !