# Concours blanc - Janvier 2025

**L'épreuve dure 2 heures. Le sujet est constitué de 5 pages. L'usage de la calculatrice est autorisé.**

*Résoudre les exercices de ce sujet sur* ***copies doubles****. Attention au soin et à la rigueur : numérotez les questions, rédigez les réponses, encadrez les résultats. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements comptent pour une part importante de l'évaluation de la copie, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition, en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

# Un peu de physique autour du ciel

Le ciel occupe approximativement la moitié de notre champ de vision, qu'il fasse jour ou nuit (à condition qu'on soit à l'extérieur, bien sûr...). Ce problème essaie d'expliquer quelques observations le concernant, sa couleur le jour, et la position et l'apparence des étoiles la nuit. Les trois parties sont indépendantes.

## Partie 1 - Le bleu du ciel

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement d'atomes (ou de molécules) soumises à un champ électromagnétique. Les électrons "suivent" le champ électrique en raison de la force de Lorentz, et donc se comportent comme des oscillateurs forcés en régime sinusoïdal si le champ électrique est sinusoïdal, comme celui d'une onde électromagnétique.

On étudie un électron, situé en un point $M$, de charge $q = -e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et de masse $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, dans le référentiel lié au noyau de l'atome, au centre $O$. On suppose qu'il ne peut se déplacer que dans une direction de vecteur de base $\vec{e}_x$. Cet électron est plongé dans un champ électromagnétique sinusoïdal $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\,\vec{e}_x$ de pulsation $\omega$ : on suppose que cela se traduit par la *force de Lorentz*[1]

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

De plus, l'électron est relié à l'atome par une interaction coulombienne, qu'on modélise comme une force de rappel $\vec{F}_r = -k\,\overrightarrow{OM}$. On supposé également que l'électron perd de l'énergie en émettant lui-même des ondes électromagnétiques : cela se traduit par une "force de frottement"

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse de l'électron dans le référentiel terrestre.

1. Faire un schéma. A quel autre système physique du cours ce modèle ressemble-t-il ?
2. Faire un bilan des forces s'exerçant sur l'électron (il n'y a pas de support sur lequel il repose). Calculer la valeur du poids de l'électron, et le comparer avec celle de la force de Lorentz : peut-on le négliger ? On donne $E_0 \sim 700\,\mathrm{N \cdot C^{-1}}$.
3. Appliquer la seconde loi de Newton à l'électron, et projeter l'équation sur $\vec{e}_x$.
4. On pose $x = \|\overrightarrow{OM}\|$. Justifier pourquoi $x(t)$ est de la forme

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $x_0$ et $\varphi$ des constantes. On va utiliser la notation complexe : pourquoi ? Définir $\underline{x}(t)$ tel que sa partie réelle soit égale à $x(t)$.

[1] Le champ magnétique $\vec{B}$ a également une légère influence sur le mouvement, mais on le néglige dans ce modèle.

5. Montrer que
$$\underline{x}(t) = \frac{-eE_0}{k - m_e\omega^2 + j\alpha\omega}\, e^{j\omega t}$$

6. On pose
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} \quad ; \quad \zeta = \frac{\alpha}{2m_e\omega_0}$$
Quel est le nom de ces deux constantes ? Réécrire $\underline{x}(t)$ en introduisant $\omega_0$ et $\zeta$.

7. A partir de ce qui précède, donner les expressions de $x_0$ et de $\varphi$ en fonction de $E_0$, $\omega_0$, $\omega$ et $\zeta$.

8. Quel est le lien entre l'accélération suivant $x$, $a_x(t) = \vec{a} \cdot \vec{e}_x$ et $x$ ? En déduire le lien entre $\underline{a}_x(t)$ et $\underline{x}(t)$, puis l'expression de l'amplitude de l'accélération.

9. L'atome se trouve dans l'atmosphère, et est éclairé par la lumière blanche du Soleil : il est donc plongé dans plein de champs électriques de pulsations $\omega \in [\omega_1\,;\omega_2]$, correspondant au spectre complet de la lumière visible. Calculer les valeurs numériques de $\omega_1$ et $\omega_2$, sachant que l'indice de réfraction de l'air vaut à peu près 1.

10. On admet que $\zeta \ll 1$, et que $\forall\omega \in [\omega_1\,;\omega_2]\ \omega \ll \omega_0$ (il faudrait des valeurs numériques de $k$ et de $\alpha$ pour le vérifier, mais elles sont dures à estimer). Montrer que l'amplitude $a_x$ est approximativement proportionnelle à $\omega^2$.

11. *Le bleu du ciel.* Un électron accéléré émet de la lumière avec une puissance moyenne proportionnelle à $a_x^2$. Expliquer pourquoi le ciel est bleu, et non pas blanc !

12. **Amortissement des oscillations.** On suppose désormais que l'onde lumineuse n'agit plus sur l'électron : cela revient à considérer qu'il est lâché, sans vitesse initiale, depuis une position initiale $x_i \neq 0$, et qu'il n'est plus soumis à la force de Lorentz $\vec{F}$.

    (a) Adapter l'équation du mouvement de la question 3. à cette nouvelle situation, en faisant apparaître $\omega_0$ et $\zeta$.

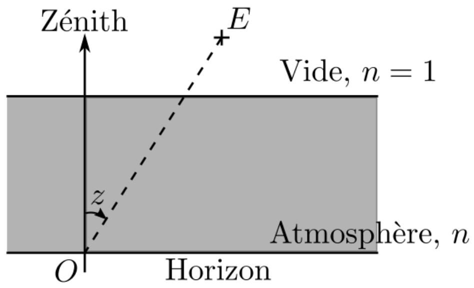
    (b) Résoudre l'équation différentielle, toujours dans l'hypothèse où $\zeta << 1$. On montrera (*en simplifiant éventuellement un terme*)
    $$x(t) \simeq A\cos(\Omega t)e^{-Kt}$$
    en précisant les expressions de $A$, $\Omega$ et $K$. Quelle est la nature du mouvement ?

    (c) Calculer l'énergie potentielle élastique $E_p(t)$ associée à la force de rappel $\vec{F}_r$ (en faisant toujours l'analogie avec le ressort), et l'énergie cinétique $E_c(t)$ de l'électron. En déduire que l'énergie mécanique de l'électron s'écrit, toujours sous l'hypothèse $\zeta << 1$ :
    $$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) \simeq \frac{1}{2}kx_i^2 e^{-2\zeta\omega_0 t}$$

    (d) On note $\Delta E_m = E_m(t+T) - E_m(t)$ la variation d'énergie lors d'une période de pseudo-oscillations. Démontrer que, au premier ordre en $\zeta$ (c'est-à-dire en négligeant tous les termes en $\zeta^n$ si $n > 1$) :
    $$\Delta E_m = -4\pi\zeta E_m(t)$$
    Commenter le sens physique de $\zeta$ à partir de cette relation.
    *Indication : deux développements limités à l'ordre* $1$ *:*
    $$e^{\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon + o(\varepsilon^2) \quad ; \quad (1+\varepsilon)^{\alpha} = 1 + \alpha\varepsilon + o(\varepsilon^2)$$
    *où* $o(\varepsilon^2)$ *représente un terme d'ordre* $\varepsilon^2$*.*

## Partie 2 - Observer le ciel nocturne : position et couleur des étoiles

Lors de l'observation du ciel, la position des astres ne correspond pas à leur position réelle, en raison de la réfraction de la lumière dans l'atmosphère. En effet, l'indice optique de l'air n'est pas rigoureusement égal à celui du vide ! On note $z$ l'*angle zénithal réel* sous lequel l'astronome, situé au point $O$, observe une étoile $E$. Il s'agit de l'angle que forme $(OE)$ avec l'axe vertical, qu'on appelle zénith. L'air a un indice de réfraction $n = 1,0003$, et le vide a un indice de réfraction rigoureusement égal à 1.




13. Refaire le schéma sur votre copie, et tracer la marche réelle d'un rayon issu de l'étoile en tenant compte de la réfraction sur l'atmosphère. Placer le point $E_r$, position "réelle" de l'étoile.
14. Calculer l'*angle zénithal réel* $z_r$, qui est l'angle entre $(OE_r)$ et le zénith, en fonction de $n$ et $z$. Pour simplifier, on supposera que le rayon incident sur l'atmosphère issu de $E_r$ forme un angle environ égal à $z_r$ avec la normale.
15. Calculer numériquement $\Delta z = z_r - z$, en supposant que $z = 30°$. On l'exprimera en degrés, puis en secondes d'arc ($1'' = 1/3600°$). Commenter cette valeur : est-ce un phénomène perceptible ?

L'espace est une immense étendue de vide, dans l'imaginaire collectif. En réalité, il n'est pas *totalement* vide : même en dehors des systèmes stellaires, on trouve de la matière. Poussières, particules énergétiques (rayonnements cosmiques), ...occupent l'espace, même de manière très "diluée". En particulier, les poussières ont pour effet d'*atténuer* très légèrement la lumière qui les traverse. C'est un phénomène très ténu, mais les distances de propagation sont tellement immenses qu'il en devient mesurable.

16. Rappeler ce qu'est la dispersion pour les ondes. Le vide est un milieu non dispersif pour les ondes électromagnétiques : qu'est-ce que cela implique pour la relation entre norme du vecteur d'onde $k$ et pulsation $\omega$ ?
17. On considère une onde lumineuse $s(x, t)$ sinusoïdale et progressive, d'amplitude $s_0$, se propageant dans le vide. On note $k$ et $\omega$ la norme de son vecteur d'onde et sa pulsation. Comment s'exprime $s(x, t)$ en fonction de ces paramètres, de $x$ et de $t$ ?
18. L'*intensité lumineuse* $I$ est définie par la moyenne temporelle de $s^2$ sur une période $T$ :

$$I(x) = \langle s(x,t)^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(x,t)^2\, dt$$

Rappeler le lien entre $T$ et $\omega$, puis calculer $I(x)$, et montrer qu'elle ne dépend pas de $x$.

En réalité, les poussières atténuent légèrement l'intensité lumineuse au cours de la propagation. On introduit le *cœfficient d'extinction* $\kappa$, qui décrit l'absorption des ondes électromagnétiques par le milieu interstellaire. On peut alors écrire, lors de la propagation sur une longueur $dx$ dans le milieu interstellaire, que

$$dI = -\kappa I(x)\, dx$$

19. Quelle est la dimension de $\kappa$ ? Démontrer la *loi de Beer-Lambert* :

$$I(x) = I_0 e^{-\kappa x}$$

et préciser le sens physique de $I_0$. Comment définir une *distance caractéristique* $\delta$ décrivant la perte d'intensité lumineuse de l'onde ?

20. En déduire que la forme de $s(x,t)$ de l'onde se propageant avec absorption s'écrit sous la forme

$$s(x,t) = s_0 e^{\alpha x} \cos(\varphi(x,t))$$

en précisant les expressions de $\alpha$ et de $\varphi(x,t)$ en fonction des données. Représenter, sur deux graphiques différents :

- $s = f(x)$ à une valeur de $t$ fixée.
- $s = f(t)$ à une valeur de $x$ fixée.

et comparer avec l'onde sinusoïdale se propageant sans atténuation.

21. Le cœfficient d'extinction dépend de la longueur d'onde $\lambda$ des ondes à travers la relation (valable principalement dans le visible et le proche infrarouge) :

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{\lambda}$$

Qu'est-ce que cela change sur la "couleur apparente" des étoiles lointaines observées depuis la Terre par rapport à leur couleur réelle ?

On préfère, en astronomie, parler de *magnitude* $M$ au lieu de l'intensité lumineuse $I$. Elle est définie par une échelle logarithmique :

$$M \simeq M_{\text{ref}} - 2,5 \log\left(\frac{I}{I_{\text{ref}}}\right)$$

avec $M_{\text{ref}} = 0$ ici une magnitude de référence, et $I_{\text{ref}}$ l'intensité lumineuse de référence telle que $M(I_{\text{ref}}) = M_{\text{ref}}$. *L'intensité lumineuse et donc la magnitude dépend aussi de la distance entre l'étoile et la Terre, mais on simplifie dans ce problème en le négligeant.*

22. On considère une étoile éloignée d'une distance $d$ de la Terre, éclairant avec une intensité lumineuse "réelle" $I_0 = I_{\text{ref}}$. Exprimer sa magnitude $M$ en fonction de $\kappa$ et $d$. Une étoile brillante a-t-elle une magnitude élevée ou faible ?

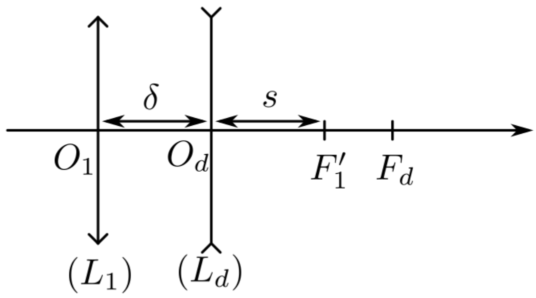
23. Une étoile de magnitude supérieure à 6 est invisible à l'œil nu. En déduire la distance maximale, en *années-lumière*, à laquelle l'étoile peut se trouver pour qu'on puisse l'observer, sachant que $\kappa \simeq 3 \cdot 10^{-20}\,\text{m}^{-1}$. Peut-on observer à l'œil nu les étoiles du centre de la Voie Lactée, situé à environ $27\,000\,\text{al}$ de nous ?

## Partie 3 - Une amélioration de la lunette astronomique

Pour observer les objets célestes, les astronomes amateurs peuvent utiliser un télescope (système avec des miroirs incurvés), ou parfois une lunette astronomique.

24. Faire un schéma de la lunette astronomique simple (en précisant comment doivent être placées les deux lentilles convergentes), et rappeler l'expression de son grossissement $G$. Comment choisir les focales des lentilles pour grossir le plus possible les objets ?

25. Pour augmenter "artificiellement" la focale de l'objectif, noté $(L_1)$, on peut lui ajouter une lentille divergente $(L_d)$ de focale $f'_d$ et de centre optique $O_d$. On appelle ce dispositif un *doublet de Barlow*. On note $s = \overline{O_d F'_1}$ et $\delta = \overline{O_1 O_d}$, de sorte que $s < |f'_d|$. Recopier le schéma et tracer la marche d'un rayon parallèle à l'axe optique à travers le système.




26. Démontrer que le doublet de Barlow se comporte, pour un objet à l'infini, comme une unique lentille de focale

$$f'_b = f'_1 - \frac{s}{1 + \frac{f'_d}{s}}$$

Justifier que ce dispositif peut améliorer le grossissement de la lunette.