TD Chap. 0 - Unités de mesure et analyse dimensionnelle
Correction

1- Unités et grandeurs usuelles

1) $f = \frac{1}{T}$ donc $[f] = \frac{1}{[T]} = T^{-1} \Rightarrow Hz = s^{-1}$

2) 2ᵉ loi de Newton : $F = m\frac{dv}{dt}$ donc $[F] = \frac{[m][v]}{[t]} = MLT^{-2} \Rightarrow N = kg.m.s^{-2}$

3) $P = \frac{F}{S}$ donc $[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \Rightarrow Pa = kg.m^{-1}.s^{-2}$

4) $\mathcal{G} = \frac{Fd^2}{m_1m_2} \Rightarrow [\mathcal{G}] = \frac{[F][d]^2}{[m]^2} = \frac{MLT^{-2}.L^2}{M^2} = L^3T^{-2}M^{-1}$; $\mathcal{G}$ est en $m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

5) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [E] = [m][v]^2 = ML^2T^{-2} \Rightarrow J = kg.m^2.s^{-2}$

6) $[\mathcal{P}] = \left[\frac{dE}{dt}\right] = \frac{[E]}{[t]} \Rightarrow [\mathcal{P}] = ML^2T^{-3} \Rightarrow W = kg.m^2.s^{-3}\ (= J.s^{-1})$

7) $i = \frac{dq}{dt}$ donc $[q] = [i][t] = IT \Rightarrow C = A.s$

8) $\mathcal{P} = ui$ donc $u = \frac{\mathcal{P}}{i} \Rightarrow [u] = \frac{[\mathcal{P}]}{[i]} = ML^2T^{-3}I^{-1} \Rightarrow V = kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}\ (= W.A^{-1})$

9) $u = Ri$ donc $R = \frac{u}{i} \Rightarrow [R] = \frac{[u]}{[i]} = ML^2T^{-3}I^{-2} \Rightarrow \Omega = kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}\ (= V.A^{-1})$

10) $C = i\frac{dt}{du} \Rightarrow [C] = \frac{[i][t]}{[u]} = \frac{IT}{ML^2T^{-3}I^{-1}} = I^2M^{-1}L^{-2}T^{+4} \Rightarrow F = A^2.s^4.m^{-2}.kg^{-1}\ (= C.V^{-1})$

2- Vérifier l'homogénéité de relations

1) $[v] = LT^{-1}$; $[\sqrt{gh}] = (LT^{-2}.L)^{1/2} = LT^{-1} \Rightarrow$ <u>Ok</u>.

2) $[P] = MLT^{-2}$; $[mg] = MLT^{-2} \Rightarrow$ <u>Ok</u>.

3) $[E] = ML^2T^{-2}$; $[Cu] = I^2T^4L^{-2}M^{-1}.ML^2T^{-3}I^{-1} = I.T \Rightarrow$ <u>Faux</u>.

<u>Remarque</u> : $[Cu^2] = I^2T^4L^{-2}M^{-1}(ML^2T^{-3}I^{-1})^2 = ML^2T^{-2} \Rightarrow E = \frac{1}{2}Cu^2$

4) $[T] = T$; $\left[\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G} M}}\right] = \left(\frac{L^3}{ML^3T^{-2}L^{-1}}\right)^{1/2} = T \Rightarrow$ OK.

3 - La formule la plus célèbre de la physique

Dimensions : $[E] = ML^2T^{-2}$; $[m] = M$ et $[c] = LT^{-1}$

$$E = m^\alpha c^\beta \Rightarrow ML^2T^{-2} = M^\alpha L^\beta T^{-\beta} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha & (M) \\ 2 = \beta & (L) \\ -2 = -\beta & (T) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{E = mc^2}$

4 - Modèle de Rayleigh pour la vibration d'une étoile

$f = k R^\alpha \rho^\beta \mathcal{G}^\gamma$. Dimensions : $[R] = L$; $[\rho] = ML^{-3}$; $[\mathcal{G}] = L^3T^{-2}M^{-1}$ et $[f] = T^{-1}$

$$\hookrightarrow T^{-1} = L^{\alpha+3\gamma-3\beta} M^{\beta-\gamma} T^{-2\gamma} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -2\gamma \; (T) \\ \alpha + 3\gamma - 3\beta = 0 \; (L) \\ \beta - \gamma = 0 \quad (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1/2 \\ \beta = \gamma = 1/2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Donc $\boxed{f = k\sqrt{\rho \mathcal{G}}}$

5 - Modèle de Taylor - Culick pour l'éclatement d'une bulle

On peut proposer : $h = k\, v^\alpha \rho^\beta \gamma^\delta$ avec k une constante et α, β et δ des exposants.

Dimensions : $[h] = L$; $[v] = LT^{-1}$; $[\rho] = ML^{-3}$ et $[\gamma] = \left[\frac{F}{\ell}\right] = MLT^{-2}.L^{-1} = MT^{-2}$

$$\hookrightarrow L = (LT^{-1})^\alpha (ML^{-3})^\beta (MT^{-2})^\delta = L^{\alpha-3\beta} M^{\beta+\delta} T^{-\alpha-2\delta}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ \beta + \delta = 0 \\ -\alpha - 2\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\delta + 3\delta = 1 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = -2\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = -1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{h = \frac{k\gamma}{\rho v^2}}$ (Mesurer la vitesse d'éclatement permet de déterminer l'épaisseur du film au moment de l'éclatement !)

6 - Pression dans une atmosphère isotherme.

1) $P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$. Dimensions : $[M] = MN^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$, $[z] = L$, $[T] = \Theta$

Pour R, on regarde la loi des gaz parfaits : $R = \frac{PV}{nT} \Rightarrow [R] = \frac{(ML^{-1}T^{-2})(L^3)}{N\Theta}$

$= ML^2T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}$

$\boxed{\left[\frac{Mgz}{RT}\right] = \frac{MN^{-1} \cdot LT^{-2} \cdot L}{ML^2T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}\Theta} = 1}$: l'argument n'a pas de dimension.

2) Comme $\left[\frac{Mgz}{RT}\right] = 1$, $\left[\frac{RT}{Mg}\right] = [z]$, donc $\boxed{H = \frac{RT}{Mg}}$ a la dimension d'une longueur. (On verra que $H \sim 8\,km$)

7 - Tailles caractéristiques des animaux

1) $S = 4\pi r^2$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

2) $S \sim r^2$; $\boxed{V \sim r^3}$. $m = \rho V$ donc $\boxed{m \sim r^3}$

3) $E_C = \frac{1}{2} m v^2 \sim r^3$. Surface d'impact : $S \sim r^2$. On peut définir un "facteur de dangerosité" $\boxed{f = \frac{E_C}{S} \sim r}$: si $E_C \nearrow$ ou $S \searrow$, le choc sera plus violent.

La dangerosité de la chute est approximativement proportionnelle à la taille de l'animal ; donc la fourmi peut survivre à une chute qui serait létale pour l'éléphant.

4) L'énergie thermique varie suivant deux phénomènes dans le corps de l'animal :

. L'animal produit de l'énergie thermique par ses processus biologiques. La puissance associée est proportionnelle à son volume, donc : $\mathcal{P}_{th}^{prod} \sim r^3$

. L'animal échange de l'énergie avec son environnement, à la surface de son corps. La puissance associée est donc proportionnelle à sa surface : $\mathcal{P}_{th}^{éch} \sim r^2$

Finalement : $\dfrac{\mathcal{P}_{th}^{prod}}{\mathcal{P}_{th}^{éch}} \sim \dfrac{r^3}{r^2} \sim r$: un animal de grande taille produit davantage d'énergie, mais l'évacue moins efficacement. L'éléphant utilise ses grandes oreilles innervées pour évacuer davantage de chaleur. Inversement, les petits mammifères sont très sensibles au froid, car ils perdent rapidement leur énergie.

8 - Energie libérée par la bombe nucléaire de l'essai Trinity

On cherche une loi de puissance de la forme : $E = kR^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$

$\hookrightarrow ML^2T^{-2} = L^{\alpha} T^{\beta} (ML^{-3})^{\gamma} = L^{\alpha - 3\gamma} T^{\beta} M^{\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \gamma \\ 2 = \alpha - 3\gamma \\ -2 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = 5 \\ \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E = \frac{k \rho R^5}{t^2}}$$

Estimation numérique: Seulement valable si k est de l'ordre de l'unité (peu probable). On utilise peu de CS car c'est une estimation.

$$\begin{cases} t = 0{,}016 \text{ s (photo)} \\ \rho = 1{,}3 \text{ kg.m}^{-3} \text{ (donnée)} \\ R = 100 \text{ m (mesure sur photo)} \end{cases} \Rightarrow E = \frac{\rho R^5}{t^2} = \frac{1{,}3 \times (1{,}0.10^2)^5}{(1{,}6 \times 10^{-2})^2} = 5{,}1.10^{13} \text{ J.}$$

En équivalent TNT : $E_{TNT} = \dfrac{5{,}1.10^{13}}{4{,}18.10^9} = 1{,}2.10^4$ tonnes $=$ 12 000 tonnes de TNT

La vraie valeur était de l'ordre de 20 000 tonnes : pas mal !

(G. I. Taylor avait trouvé 17 000 tonnes de TNT en essayant d'estimer k par comparaison avec d'autres explosions).

Remarque : $R(t) = \left(\dfrac{E}{k\rho}\right)^{1/5} t^{2/5}$: tracer R en fonction de $t^{2/5}$ donne une droite, si on a accès à des photos prises à d'autres instants. Cela permet une mesure plus précise de $\left(\dfrac{E}{k\rho}\right)^{1/5}$ (pente de la droite), dont on peut déduire E.