Chapitre 0 - Unités de mesure et analyse dimensionnelle

Ce chapitre ne concerne pas un point précis du programme officiel de PCSI, mais les notions qui y sont discutées sont cruciales pour la compréhension du cours de physique. Quelques rappels ne font pas de mal, et permettront de se remettre dans le bain !

I Dimensions et unités de mesure

I.1 Définitions fondamentales

> **Définition 1 :** Une **grandeur physique** est une quantité mesurable (directement ou non) permettant de décrire un système physique.

Exemples : Temps, longueur, vitesse, tension, intensité électrique, masse, force, énergie...

On décrit un système physique par un certain nombre de grandeurs physiques pertinentes, et par les liens (formules, lois) qui les relie. Il faut, pour cela, être capable de comparer les grandeurs physiques entre elles. On le fait grâce à la notion d'unité de mesure.

> **Définition 2 :** Une **unité de mesure** est un étalon de référence, associé à une grandeur physique, qui permet d'exprimer toute valeur de cette grandeur physique comme un multiple de l'unité de mesure.

Exemple : Le mètre est une unité de mesure de la grandeur physique "distance". Dire qu'une distance mesure trois mètres, revient à dire qu'elle est "trois fois plus grande que le mètre".

> **Définition 3 :** La **dimension** d'une grandeur physique caractérise sa nature, ainsi que les unités qu'on peut utiliser pour la décrire. On la note entre crochets : $[X]$ est la dimension de la grandeur X.

Exemple : Le rayon d'un cercle et son périmètre ont la même dimension (on peut les mesurer avec le même étalon, par exemple une ficelle de longueur fixée). En revanche, la durée du cours de physique d'aujourd'hui n'a pas la dimension d'une longueur, mais celle d'un temps.

I.2 Système International des unités de mesure

La plupart des grandeurs physiques étant reliées ensemble, il faut, arbitrairement, choisir quelques grandeurs de base pour exprimer les autres en fonction d'elles.

> **Définition 4 :** Une **grandeur de base** est une grandeur physique choisie arbitrairement comme étant fondamentale. Une **grandeur dérivée** s'exprime comme une combinaison de grandeurs de base.

Il existe plusieurs possibilités pour choisir un ensemble de grandeurs de base. Nous allons exclusivement travailler avec le Système International, fixé par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

> Le Système International des unités de mesure considère que les sept grandeurs de base nécessaires pour exprimer toute grandeur physique sont : le temps, la longueur, la masse, le courant électrique, la température, la quantité de matière, et l'intensité lumineuse.

Grandeur	Dimension	Unité
Temps	T	
Longueur	L	
Masse	M	
Température	Θ	
Intensité électrique	I	
Quantité de matière	N	
Intensité lumineuse	J	

Pour donner un exemple de grandeur dérivée : la vitesse s'exprime comme le rapport entre une distance et une durée : $[\text{vitesse}] = L/T$. On donne parfois des noms aux unités de grandeurs dérivées : par exemple, on peut mesurer en litres un volume, dont la dimension est le cube d'une longueur ($[V] = L^3$).

Il existe d'autres systèmes d'unités, qui prennent en général les mêmes grandeurs de base, mais définissent d'autres unités de référence. Par exemple, le système CGS utilise le centimètre, le gramme et la seconde pour les unités respectives de longueur, masse et temps. on pourrait aussi parler du système anglo-saxon, qui mesure par exemple les distances en pouces.

Remarque : Les unités s'écrivent en majuscule si leur nom est un hommage à un.e scientifique (par exemple, Ampère). Seule exception : le litre, qu'on note souvent L alors qu'aucun.e scientifique connu.e ne porte ce nom !

I.3 Préfixes du Système International des unités

Les ordres de grandeur des grandeurs physiques peuvent varier de manière impressionnante. Pour simplifier les écritures, on peut associer à chaque unité un *préfixe* pour en augmenter ou diminuer l'ordre de grandeur.

Préfixe						/					
Symbole						/					
Puissance	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}

II Analyse dimensionnelle et écriture des résultats

II.1 Règles de l'analyse dimensionnelle et homogénéité

L'analyse dimensionnelle consiste à étudier les dimensions des grandeurs physiques mises en jeu. Elle sert principalement à deux choses : vérifier la cohérence d'un résultat, et intuiter une formule reliant plusieurs grandeurs physiques grâce aux dimensions.

Règles de l'analyse dimensionnelle : Soient x et y deux grandeurs physiques.

- Seules des grandeurs avec la même dimension peuvent être additionnées ou soustraites.
- La dimension d'un produit est le produit des dimensions : $[xy] = [x][y]$.
- La dimension d'un quotient est le quotient des dimensions : $\left[\dfrac{x}{y}\right] = \dfrac{[x]}{[y]}$.
- La dimension d'une dérivée suit la règle des quotients : $\left[\dfrac{dx}{dy}\right] = \dfrac{[x]}{[y]}$.
- La dimension d'une intégrale suit la règle des produits : $\left[\displaystyle\int x\,dy\right] = [x][y]$.
- L'argument d'une fonction usuelle (par exemple, cosinus, sinus, exponentielle, logarithme...) ne doit pas avoir de dimension. En conséquence, les angles n'ont pas de dimension.

- **Homogénéité d'une formule** : la dimension de part et d'autre d'un signe "=" doit être la même.

Il est **crucial** de retenir la règle d'homogénéité, dont il découle que :

Vérifier l'homogénéité d'un résultat doit être un réflexe à la fin de chaque calcul. De plus, si un résultat est faux, on peut souvent trouver l'erreur de calcul en vérifiant l'homogénéité de chaque ligne.

II.2 Intuiter des relations avec l'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet parfois de deviner des relations entre grandeurs physiques, si ces relations sont des *lois de puissance*. On suppose qu'on étudie une grandeur physique G, dont on sait qu'elle dépend des puissances de grandeurs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$. On peut écrire :

$$G = k\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec k une constante numérique sans dimension, et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ des nombres sans dimensions (en général entiers ou rationnels). En exprimant les dimensions de G et des x_i en fonction des dimensions de base du Système International, on peut en déduire les valeurs des α_i en appliquant la règle d'homogénéité, à condition d'avoir suffisamment d'équations (donc que n soit inférieur au nombre de dimensions de base indépendantes mises en jeu).

Application 1 : Un pendule simple est constitué d'un petit objet de masse m suspendu à un fil de longueur l, soumis au champ de pesanteur terrestre dont l'intensité est g. On suppose que la période T des oscillations du pendule dépend seulement de m, g et l en suivant une loi de puissance.

1. Déterminer les dimensions de T, m, l et g.
2. En écrivant que $T = k\, m^\alpha g^\beta l^\gamma$, avec k une constante numérique, déterminer la relation entre ces grandeurs physiques.

II.3 Ecriture des résultats : chiffres significatifs

En physique, toutes les mesures ne se valent pas : certaines sont plus précises que d'autres, pour diverses raisons (qualité du matériel de mesure, complexité de la méthode...). Lorsqu'on fait un calcul à partir de grandeurs qu'on a mesurées, il est illusoire d'espérer que le résultat soit *plus précis que les données*. Les chiffres significatifs (CS) sont un moyen de tenir compte, sommairement, de cette notion de précision.

Définition 5 : Lors de l'écriture numérique d'un résultat, tous les chiffres qui apparaissent sont dits *significatifs*. Il s'agit des chiffres que l'on connaît avec certitude, sauf le dernier chiffre qui est *incertain*

Exemples :

- $d = 1{,}23\,\mathrm{m}$ possède 3 chiffres significatifs. Le 3 est incertain (par exemple, si en réalité $d = 1{,}238\,\mathrm{m}$, le 3 serait transformé en 4). En termes de précision, cela signifie qu'on connaît d au centième de millimètre près.
- $m = 12{,}40\,\mathrm{kg}$ possède 4 chiffres significatifs (on compte le 0 !). Cette écriture est plus précise que $m = 12{,}4\,\mathrm{kg}$, car cette deuxième écriture pourrait correspondre à $12,41$, $12,42$ ou encore $12{,}44\,\mathrm{kg}$.

Pour respecter le nombre de chiffres significatifs, il est donc souvent nécessaire d'utiliser la notation scientifique : $1{,}2\cdot 10^5\,\mathrm{m}$ a 2 CS, alors que $120\,000\,\mathrm{m}$ en a 6.

Dans la pratique, il sera rare de travailler avec plus de 3 CS en CPGE. Mais la rigueur dans leur utilisation est rigoureusement évaluée lors des concours : un résultat exprimé avec le mauvais nombre de CS est faux ! Il faudra donc respecter scrupuleusement les règles des CS.

Le nombre de CS du résultat d'une application numérique suit les règles suivantes :

- Le résultat d'une multiplication ou division comporte le nombre de CS de la donnée qui en a le moins.
- Le résultat d'une fonction usuelle a le même nombre de CS que son argument.
- Le résultat d'une addition ou d'une soustraction a le même nombre de *décimales* que la donnée qui en a le moins ($3{,}1\,\mathrm{m} + 12\,\mathrm{cm} = 3{,}1\,\mathrm{m} + 0{,}12\,\mathrm{m} = 3{,}2\,\mathrm{m}$, mais $200\,\mathrm{m} + 12\,\mathrm{cm} = 200\,\mathrm{m}$).
- Les constantes mathématiques (π, e, ...) ont un nombre infini de chiffres significatifs (mais pas les constantes physiques comme c ou $\mathcal{G}$!)

Remarque : Attention aux calculs en cascade : mieux vaut exprimer le résultat final sous forme littérale et faire l'application numérique "une bonne fois pour toutes", plutôt que de faire des applications numériques intermédiaires où les erreurs d'arrondi se cumulent et le suivi des CS est plus difficile !

Pour aller plus loin !

Playlist de sept vidéos de e-penser sur les grandeurs de base du Système international et leurs unités.

Site web du Bureau International des Poids et Mesures, qui est chargé des définitions officielles des unités du Système International.